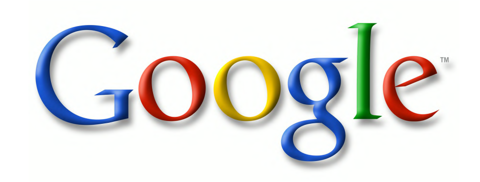
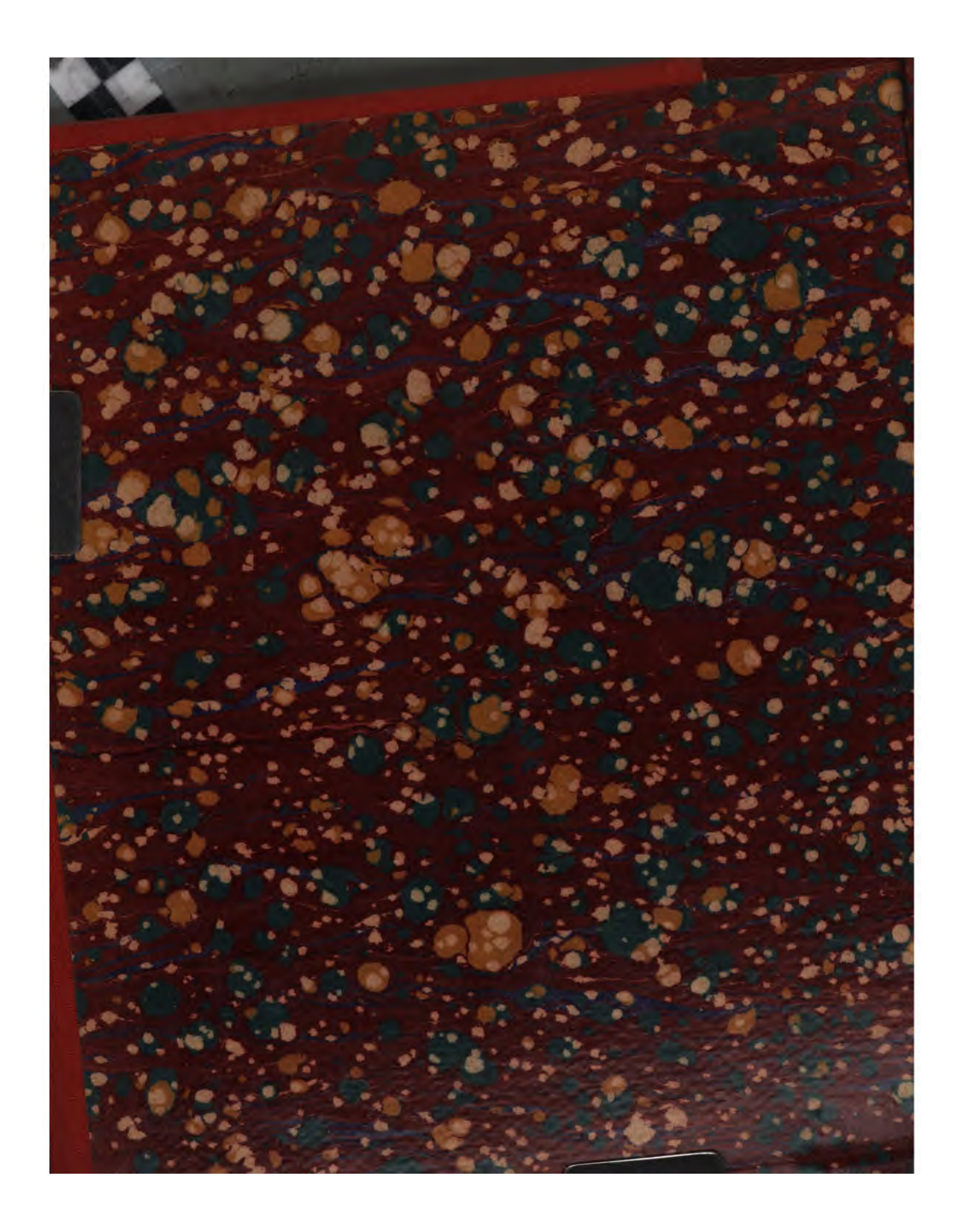
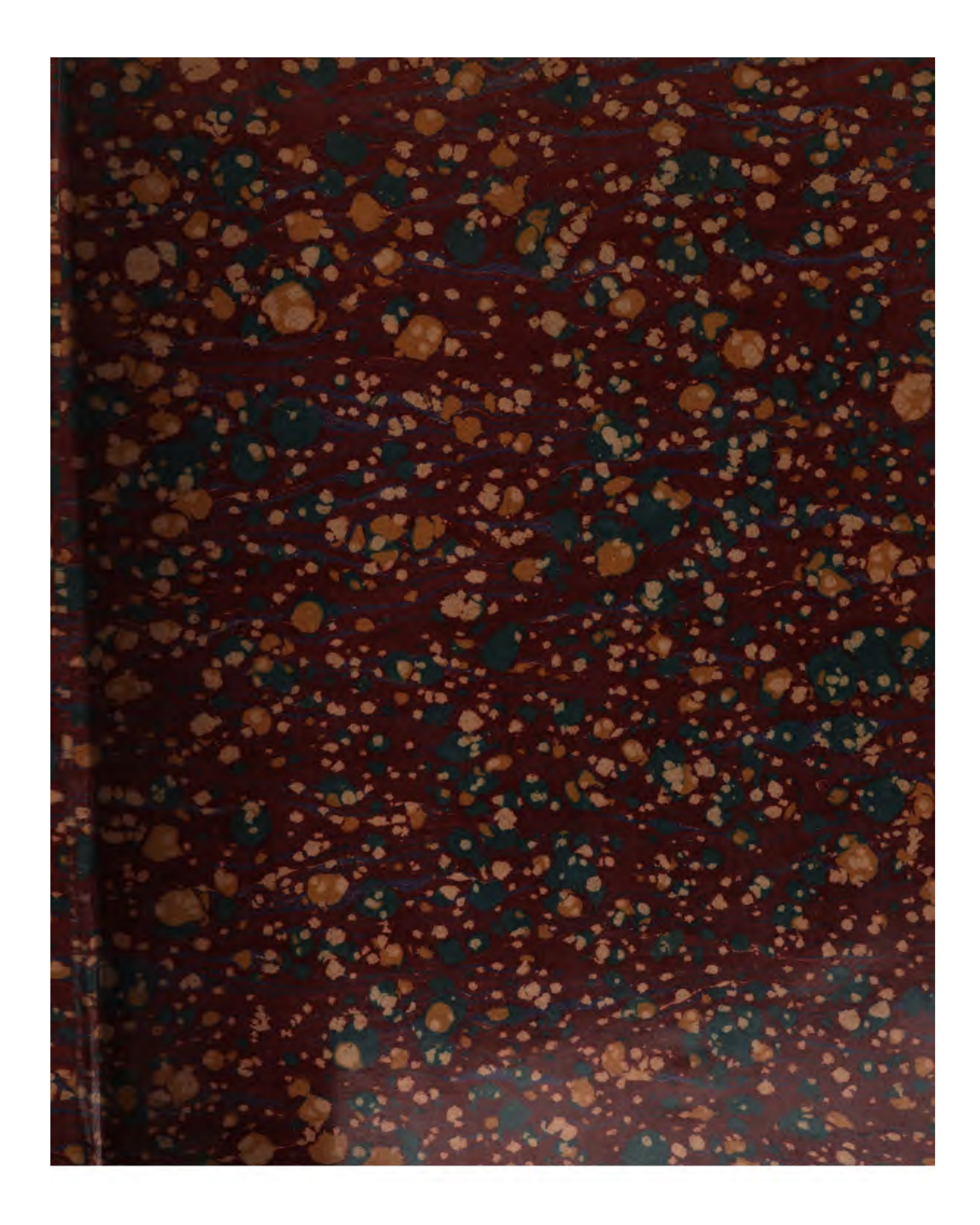



Stanford University Libraries
3 6105 027 649 511





JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION

DE CET ÉTABLISSEMENT.

IIe SÉRIE. — DIXIÈME CAHIER.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

Journal de l'École Polytechnique. — Ire Série. 64 Cahiers in-4, avec une Table des matières contenues dans les 64 Cahiers; 1794-1894..... 1000 fr.

Les Cahiers suivants se vendent séparément :

Cahier	Prix	Cahier	Prix
VIIe et VIIIe, chaque Cahier.	8 fr.	XXXIe	9 fr.
IXe, comprenant la Théorie des fonctions analytiques, par Lagrange	7	XXXIIe	5
XIe	12	XXXIIIe	9
XIIe	12	XXXIVe à XXXVIIe	10
XIIIe	8	XXXVIIIe et XXXIXe	8
XIVe	10	XLe à XLIIIe	10
XVIe et XVIIe	8	XLIVe à LIVe	12
XXIIIe	6	LVe à LVIIe	14
XXIVe	7	LVIIIe	10
XXVe et XXVIe	8	LIXe	12
XXVIIe	9	LXe	10
XXVIIIe	7	LXIe et LXIIe	11
XXIXe et XXXe	5	LXIIIe	12
		LXIVe	12

IIe Série.

Cahier	Prix	Cahier	Prix
Ier Cahier	10 fr.	VIe Cahier	10 fr.
IIe Cahier	10	VIIe Cahier	12
IIIe Cahier	10	VIIIe Cahier	10
IVe Cahier	13	IXe Cahier	10
Ve Cahier	10	Xe Cahier	10

Table des Matières contenues dans les 64 premiers Cahiers, formant 45 Volumes, suivie d'une Table analytique et d'une Table générale par noms d'auteurs. In-4; 1895 ..... 3 fr.

Répertoire de l'École Polytechnique, depuis l'époque de sa création en 1794, jusqu'en 1853 inclusivement; suivi de la liste des Élèves admis en 1854, avec plusieurs tableaux et résumés statistiques; par M. C.-P. Marielle. Vol. in-8 ..... 5 fr.

Répertoire de l'École Polytechnique de 1855 à 1865, faisant suite au *Répertoire de M. Marielle :* par M. Le Prieur, Trésorier de l'École. Vol. in-8 ..... 3 fr.

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

SUR LES

FONCTIONS MONODROMES D'ORDRE NON TRANSFINI

ET LES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

(QUATRIÈME NOTE);

PAR M. EDMOND MAILLET.

I.

Considérons la fonction e^{x^ρ} : c'est une fonction entière d'ordre fini ρ, si ρ est fini.

Soit, plus généralement, l'expression (¹) $y = a_1^{a_2^{\cdot^{\cdot^{a_{k+1}^{x^\rho}}}}}$, où nous faisons $a_1 = a_2 = \ldots = a_{k+1} = e$.

Nous poserons

$$y = e_{k+1}(x^\rho).$$

(¹) Nous mentionnerons pour cette expression la notation $y = a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \ldots \wedge a_{k+1} \wedge x$ de M. V. Aubry (*Interm. des Math.*, 1903, p. 53). Ici nous pouvons nous contenter d'une notation plus simple, puisque $a_1 = a_2 = \ldots = e$.

La présente Note est la suite de trois Notes antérieures : 1° *Journ. de Math.*, 1902, p. 329; 2° *Ann. Fac. Toul.*, 1902, p. 447; 3° *Bul. Soc. Math.*, fasc. I, 1903, p. 27. Ces quatre Notes développent diverses communications des *Comptes rendus* (1902, 1er semestre, p. 275 et 405; 2ᵉ semestre, p. 391 et 889; 1903, 1er semestre, p. 348; 2ᵉ semestre, p. 405 et 478), et peuvent être regardées comme se rattachant. Il suffit à peu près pour les lire de connaître le *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* et les *Leçons sur les fonctions entières* de M. Borel.

De même, nous poserons

$$\begin{aligned} \log\log x &= \log_2 x, \qquad \log\log_2 x = \log_3 x, \qquad \ldots, \\ \log e_1(x) &= x = \log_2 e_2(x) = \ldots = \log_k e_k(x), \\ \log_{k-i} e_k(x) &= e_i(x), \qquad \log_{k+i} e_k(x) = \log_i(x). \end{aligned}$$

La fonction y, pour $k \geqq 1$, est alors une fonction entière d'ordre infini. Nous dirons que *cette fonction est d'ordre* (k, ρ).

Une fonction entière qui, pour x infini, croît plus vite que $e_k(x^\rho)$, quel que soit ρ fini, est *d'ordre* $\geqq (k, \varepsilon)$; si elle croît plus vite que $e_{k+1}(x^{\rho-\varepsilon})$, moins vite que $e_{k+1}(x^{\rho+\varepsilon})$, si petit que soit ε fini positif, *elle sera d'ordre* (k, ρ); si elle croît plus vite que $e_{k+1}(x^\rho)$ quel que soit k, nous dirons provisoirement que cette fonction est *d'ordre transfini.*

Nous ne considérerons, dans ce qui suit, que les fonctions entières d'ordre non transfini.

Ceci posé, nous rappellerons que M. P. Boutroux [1] a basé un commencement de classification des fonctions entières de genre infini sur la considération des produits convergents de facteurs primaires ayant les mêmes zéros.

Il indique, par exemple, ces résultats : soit a_i le $i^{\text{ème}}$ zéro (les zéros étant rangés par ordre de modules croissants). Certaines fonctions entières $G(z)$ pour lesquelles on a, à partir d'une certaine valeur de i,

$$|a_i| > |\log i|^{+\frac{1}{\sigma}}$$

sont appelées par lui *fonctions de type exponentiel simple : l'inégalité*

$$|a_i| > \lambda |\log i|^{+\frac{1}{\sigma}},$$

λ et σ étant des membres positifs, entraîne pour elles à partir d'une certaine valeur de $|z|$

$$|G(z)| < e^{e^{(1+\varepsilon)\left(\frac{|z|}{\lambda}\right)^\sigma}},$$

quelque petit que soit ε.

[1] *Comptes rendus*, 1er semestre 1902, p. 519.

S'il existe un nombre fini σ tel que l'on ait, à partir d'une certaine valeur de i,

$$|a_i| > (\log_2 i)^{+\frac{1}{\sigma}},$$

on a, à partir d'une certaine valeur de $|z|$,

$$G(z) < e^{e^{e^{(1+\varepsilon)|z|^\sigma}}},$$

ε tendant vers o avec $\frac{1}{|z|}$; et ainsi de suite.

Malheureusement, les démonstrations de M. Boutroux ne sont pas encore publiées [1].

Nous nous proposons d'indiquer ci-dessous une classification des fonctions entières d'ordre infini, mais non transfini, dont les résultats présenteront une certaine analogie avec ceux de M. Boutroux, mais qui ne s'appuie pas sur la considération des racines de ces fonctions entières, ni sur leur représentation à l'aide de produits infinis. C'est l'étude directe de ces fonctions, basée sur la connaissance du mode de décroissance des coefficients, qui nous donnera cette classification, nous permettra de définir en même temps, par extension des définitions de M. Borel pour les fonctions de genre fini, la régularité de la croissance des fonctions entières d'ordre infini, et nous conduira, pour cette régularité, à un critère analogue à celui que nous avons déjà indiqué [2] au sujet des fonctions entières d'ordre fini. Ceci nous permettra alors de généraliser, pour les solutions des équations différentielles, des résultats déjà obtenus par nous [3] dans un cas étendu.

La plupart de ces propriétés restent vraies pour les fonctions quasi-

---

[1] Elles ont paru depuis la rédaction de ces lignes dans la Thèse de M. Boutroux, p. 94 et suiv. (voir *Acta Math.*, 1903).

[2] *Comptes rendus*, 1er septembre 1902, p. 391, et *Ann. Fac. Toul.*, 1902, p. 447.

[3] *Idem.*

entières et les fonctions monodromes ayant un point singulier essentiel isolé.

Dès lors, si ces solutions ne sont pas d'ordre transfini aux environs d'un point critique, la détermination d'une valeur asymptotique du maximum du module d'une de ces solutions pour $|z| = r$ est ramenée à la détermination d'une valeur asymptotique du coefficient d'une de ces solutions (1).

Nous envisagerons encore, à titre d'exemple, des types d'équations différentielles particuliers :

1° Équations linéaires d'ordre k dont les coefficients sont des polynomes et dont la solution générale est une fonction entière; cette fonction est d'ordre fini et, quand les coefficients des polynomes sont rationnels, il y a k intégrales indépendantes qui sont d'ordre > 0 ou des polynomes;

2° Équations de la forme

$$Ay^{(k)} = \Phi(y^{(k-1)}, \ldots, y, x)$$

où A est un polynome en x, Φ un polynome en $y^{(k-1)}, \ldots, y, x$; les solutions qui sont fonctions entières d'ordre non transfini ont leur croissance régulière; les solutions de la forme $\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)$ (ζ fonction entière d'ordre non transfini) sont telles que ζ a sa croissance régulière. C'est le cas de l'équation $y'' = 6y^2 + x$ de M. Painlevé (2);

3° Systèmes linéaires homogènes dont les coefficients sont des polynomes : les fonctions entières qui y satisfont sont d'ordre fini et à croissance régulière.

---

(1) La plupart des résultats indiqués dans notre Mémoire ont été communiqués à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, 9 février 1903, p. 348; 17 août 1903, p. 405; 21 septembre 1903, p. 478). C'est une occasion pour nous de mentionner que M. Pincherle avait obtenu, il y a plus de 20 ans (*Rendiconti del R. Istituto Lombardo*, série II, vol. XI, fasc. VIII, 9 mai 1878) une partie de notre théorème IV du *Journ. de Math.*, 1902, p. 353, sur les sommes des puissances semblables des inverses des racines d'une fonction entière et l'extension des formules de récurrence de Newton.

(2) *Bul. Soc. Math.*, 1900, p. 204.

Enfin, nous indiquons, par une extension d'une méthode de M. Liapounoff [1], une limite de l'ordre de grandeur dans le domaine de $t = \infty$ des solutions des systèmes linéaires homogènes du premier ordre à n fonctions de t quand les coefficients sont des fonctions quasi-méromorphes d'ordre non transfini pour $t = \infty$. Sauf dans le voisinage des pôles des coefficients, l'ordre de grandeur des solutions est au plus égal à celui de $e_{k+2}(|t|^{\rho+\varepsilon})$ (ε aussi petit qu'on veut, mais fini), si l'ordre des coefficients est au plus égal à celui de $e_{k+1}(t^{\rho})$.

Dans un paragraphe spécial, nous étudions les fonctions entières d'ordre zéro, qui forment une catégorie aussi étendue que celle des fonctions entières d'ordre > 0, fini ou non. Nous indiquons plus ou moins complètement une classification de ces fonctions, une valeur asymptotique du maximum du module pour $|x| = r$, un critère de régularité de croissance. Ces fonctions comprennent les fonctions quasi-algébriques; des applications arithmétiques sont probables; nous en avons déjà quelques-unes [2].

II.

Considérons la série infinie [3]

$$\sum \frac{x^m}{(\log_k m)^{\left(\frac{1}{\rho_1} - \varepsilon\right)m}}, \qquad \text{avec} \qquad k \geqq 1,$$

($|\varepsilon|$ aussi petit qu'on veut dès que $m \geqq \mu$), ou encore, en supposant à partir du terme d'indice μ assez grand

$$\frac{1}{\rho_1} - \varepsilon \geqq \frac{1}{\rho}$$

---

(1) Picard, *Analyse*, t. III, p. 362.

(2) Voir *Comptes rendus*, 1er février 1904, p. 262, et 15 février 1904, p. 410; et *Journal de Mathématiques*, 1904, où nous complétons en même temps la classification des fonctions entières d'ordre zéro.

(3) Nous supposons ici $\log_k m \geqq 1$, $m \geqq e_k(1)$.

$\left(\left|\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho}\right|\right.$ aussi petit qu'on veut, mais fini$\Big)$, la série

$$\sum \frac{x^m}{(\log_k m)^{\frac{m}{\rho}}}.$$

Soit

$$x = y^{\frac{1}{\rho}} = [\log_k(m_1+\theta)]^{\frac{1}{\rho}};$$

on a

$$\frac{x^m}{(\log_k m)^{\frac{m}{\rho}}} = \left[\frac{\log_k(m_1+\theta)}{\log_k m}\right]^{\frac{m}{\rho}}$$

(m_1 donné, $0 \leqq \theta \leqq 1$).

Pour les grandes valeurs de m ce terme est très petit; il est grand pour les valeurs de m petites par rapport à m_1. Cherchons son maximum quand m varie ou celui de

$$\psi_m = \frac{m}{\rho}[\log_{k+1}(m_1+\theta) - \log_{k+1} m].$$

On a

$$\psi'_m = \frac{1}{\rho}[\log_{k+1}(m_1+\theta) - \log_{k+1} m] - \frac{m}{\rho}\,\frac{1}{\log_k m \ldots \log m \,.\, m},$$

car

$$\frac{d}{dm}(\log_{k+1} m) = \frac{1}{\log_k m}\,\frac{d}{dm}(\log_k m) = \ldots = \frac{1}{\log_k m \log_{k-1} m \ldots \log m \,.\, m},$$

ou

$$\psi'_m = \frac{1}{\rho}[\log_{k+1}(m_1+\theta) - \log_{k+1} m] - \frac{1}{\rho \log_k m \ldots \log m}.$$

La fonction ψ'_m est constamment décroissante. En effet, soit

$$X = \log_{k+1} m + \frac{1}{\log_k m \ldots \log m} = \log_{k+1} m + Y;$$

$$-\log Y = \log_{k+1} m + \ldots + \log_2 m,$$

$$-\frac{Y'}{Y} = \frac{1}{\log_k m \ldots \log m \,.\, m} + \ldots + \frac{1}{\log m \,.\, m},$$

$$X' = \frac{Y}{m} + Y' = \frac{Y}{m}\left(1 - \frac{1}{\log_k m \ldots \log m} - \ldots - \frac{1}{\log m}\right).$$

Alors $X' \geqq 0$ dès que $\log_k m \geqq 1$, comme on le voit facilement et X' est toujours croissant, et ψ'_m décroissant : ψ'_m a au plus une racine réelle, et en a toujours une, dès que m_1 est assez grand.

Soit m_2 la racine de ψ'_m : posons

$$\log_k m_2 = \log_k(m_1 + \theta) - \zeta.$$

$$0 = \rho\psi'_{m_1} = \log \frac{\log_k(m_1+\theta)}{\log_k m_2} - \frac{1}{\log_k m_2 \ldots \log m_2},$$

$$0 = \log\left(1 + \frac{\zeta}{\log_k m_2}\right) - \frac{1}{\log_k m_2 \ldots \log m_2};$$

$\frac{\zeta}{\log_k m_2}$ est petit si m_2 est assez grand; en effet, pour $\zeta = 0$, $\psi'_{m_1} < 0$; pour $\zeta = 2$, par exemple, $\rho\psi'_{m_1} > 0$. On a

$$\log(1+\xi) = \xi - \frac{\xi^2}{2(1+\lambda\xi)^2}, \qquad 0 < |\lambda| < 1;$$

$$\log\left(1+\frac{\zeta}{\log_k m_2}\right) = \frac{\zeta}{\log_k m_2} - \frac{\zeta^2}{2(\log_k m_2)^2\left(1+\lambda\frac{\zeta}{\log_k m_2}\right)^2}.$$

Prenons

$$\zeta = \frac{1+\eta_2}{\log_{k-1} m_2 \ldots \log m_2} \qquad (\zeta = 1+\eta_2,\ \text{si } k=1,\ \eta_2 > 0,\ \text{en tout cas});$$

$$0 = \rho\psi'_{m_1} = \frac{1+\eta_2}{\log_k m_2 \ldots \log m_2}$$
$$- \frac{(1+\eta_2)^2}{2(\log_k m_2 \ldots \log m_2)^2\left(1+\lambda\frac{\zeta}{\log_k m_2}\right)^2} - \frac{1}{\log_k m_2 \ldots \log m_2}.$$

On en tire

$$\eta_2 = \frac{(1+\eta_2)^2}{2(\log_k m_2 \ldots \log m_2)\left(1+\lambda\frac{\zeta}{\log_k m_2}\right)^2} > 0.$$

On peut prendre η_2 tendant vers 0 avec $\frac{1}{m_2}$.

$\left(\left|\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho}\right|\right.$ aussi petit qu'on veut, mais fini$\Big)$, la série

$$\sum \frac{x^m}{(\log_k m)^{\frac{m}{\rho}}}.$$

Soit

$$x = y^{\frac{1}{\rho}} = [\log_k(m_1+\theta)]^{\frac{1}{\rho}};$$

on a

$$\frac{x^m}{(\log_k m)^{\frac{m}{\rho}}} = \left[\frac{\log_k(m_1+\theta)}{\log_k m}\right]^{\frac{m}{\rho}}$$

(m_1 donné, $0 \leqq \theta \leqq 1$).

Pour les grandes valeurs de m ce terme est très petit; il est grand pour les valeurs de m petites par rapport à m_1. Cherchons son maximum quand m varie ou celui de

$$\psi_m = \frac{m}{\rho}[\log_{k+1}(m_1+\theta) - \log_{k+1} m].$$

On a

$$\psi'_m = \frac{1}{\rho}[\log_{k+1}(m_1+\theta) - \log_{k+1} m] - \frac{m}{\rho}\frac{1}{\log_k m \ldots \log m . m},$$

car

$$\frac{d}{dm}(\log_{k+1} m) = \frac{1}{\log_k m}\frac{d}{dm}(\log_k m) = \ldots = \frac{1}{\log_k m \log_{k-1} m \ldots \log m . m},$$

ou

$$\psi'_m = \frac{1}{\rho}[\log_{k+1}(m_1+\theta) - \log_{k+1} m] - \frac{1}{\rho \log_k m \ldots \log m}.$$

La fonction ψ'_m est constamment décroissante. En effet, soit

$$X = \log_{k+1} m + \frac{1}{\log_k m \ldots \log m} = \log_{k+1} m + Y;$$

$$-\log Y = \log_{k+1} m + \ldots + \log_2 m,$$

$$-\frac{Y'}{Y} = \frac{1}{\log_k m \ldots \log m . m} + \ldots + \frac{1}{\log m . m},$$

$$X' = \frac{Y}{m} + Y' = \frac{Y}{m}\left(1 - \frac{1}{\log_k m \ldots \log m} - \ldots - \frac{1}{\log m}\right).$$

Alors $X' \geqq 0$ dès que $\log_k m \geqq 1$, comme on le voit facilement et X' est toujours croissant, et ψ'_m décroissant : ψ'_m a au plus une racine réelle, et en a toujours une, dès que m_1 est assez grand.

Soit m_2 la racine de ψ'_m : posons

$$\log_k m_2 = \log_k(m_1 + \theta) - \zeta.$$

$$0 = \rho\psi'_{m_2} = \log \frac{\log_k(m_1+\theta)}{\log_k m_2} - \frac{1}{\log_k m_2 \ldots \log m_2},$$

$$0 = \log\left(1 + \frac{\zeta}{\log_k m_2}\right) - \frac{1}{\log_k m_2 \ldots \log m_2};$$

$\frac{\zeta}{\log_k m_2}$ est petit si m_2 est assez grand; en effet, pour $\zeta = 0$, $\psi'_{m_2} < 0$; pour $\zeta = 2$, par exemple, $\rho\psi'_{m_2} > 0$. On a

$$\log(1+\xi) = \xi - \frac{\xi^2}{2(1+\lambda\xi)^2}, \qquad 0 < |\lambda| < 1;$$

$$\log\left(1 + \frac{\zeta}{\log_k m_2}\right) = \frac{\zeta}{\log_k m_2} - \frac{\zeta^2}{2(\log_k m_2)^2\left(1 + \lambda\frac{\zeta}{\log_k m_2}\right)^2}.$$

Prenons

$$\zeta = \frac{1+\eta_2}{\log_{k-1} m_2 \ldots \log m_2} \qquad (\zeta = 1 + \eta_2, \text{ si } k = 1, \eta_2 > 0, \text{ en tout cas});$$

$$0 = \rho\psi'_{m_2} = \frac{1+\eta_2}{\log_k m_2 \ldots \log m_2} - \frac{(1+\eta_2)^2}{2(\log_k m_2 \ldots \log m_2)^2\left(1 + \lambda\frac{\zeta}{\log_k m_2}\right)^2} - \frac{1}{\log_k m_2 \ldots \log m_2}.$$

On en tire

$$\eta_2 = \frac{(1+\eta_2)^2}{2(\log_k m_2 \ldots \log m_2)\left(1 + \lambda\frac{\zeta}{\log_k m_2}\right)^2} > 0.$$

On peut prendre η_2 tendant vers 0 avec $\frac{1}{m_2}$.

Nous pourrons poser

$$\eta_2 = \frac{1+\eta_3}{2\log_k m_2 \ldots \log m_2} = \frac{\zeta}{\log_k m_2}\,\frac{1+\eta_3}{2(1+\eta_2)},$$

d'où

$$1+\eta_3 = \frac{(1+\eta_2)^2}{\left(1+\lambda\,\frac{2\eta_2(1+\eta_2)}{1+\eta_3}\right)^2},$$

$$\left|\lambda\,\frac{2\eta_2(1+\eta_2)}{1+\eta_3}\right| < 3\eta_2,$$

$$\frac{(1+\eta_2)^2}{(1+3\eta_2)^2} < 1+\eta_3 < \frac{(1+\eta_2)^2}{(1-3\eta_2)^2};$$

$$\eta_3 = \alpha\eta_2,$$

où $|\alpha|$ est limité, et, pour fixer les idées, < 20 [1].

En résumé, la racine m_2 de $\psi'_{m_1} = 0$ est telle que

$$\log_k m_2 = \log_k(m_1+\theta) - \frac{1+\eta_2}{\log_{k-1} m_2 \ldots \log m_2},$$

avec $\eta_2 = \dfrac{1+\eta_3}{2\log_k m_2 \ldots \log m_2} > 0$, $\eta_3 = \alpha\eta_2$, *avec* $|\alpha| < 20$, η_2 *et* η_3 *tendant vers* 0 *avec* $\dfrac{1}{m_2}$.

Nous pouvons alors affirmer que tout terme T de la série $\sum \dfrac{x^m}{(\log_k m)^{\frac{m}{\rho}}}$, pour $x = [\log_k(m_1+\theta)]^{\frac{1}{\rho}}$, est au plus égal à

$$\left[\frac{\log_k(m_1+\theta)}{\log_k m_2}\right]^{\frac{m_2}{\rho}},$$

---

(1) On a, par exemple,

$$1+20\eta_2 > \frac{1+3\eta_2}{1-15\eta_2},$$

car

$$1+5\eta_2 - 300\eta_2^2 > 1+3\eta_2 \qquad (m \text{ assez grand}).$$

ou que

$$\log T \leqq \frac{m_2}{\rho}\left[\log_{k+1}(m_1+\theta) - \log_{k+1} m_2\right].$$

Or

$$\begin{aligned}\log_{k+1}(m_1+\theta) &= \log\left[\log_k m_2 + \frac{1+\eta_2}{\log_{k-1} m_2 \ldots \log m_2}\right] \\ &= \log_{k+1} m_2 + \log\left[1 + \frac{1+\eta_2}{\log_k m_2 \ldots \log m_2}\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{k+1}(m_1+\theta) &= \log_{k+1} m_2 + \frac{1+\eta_2}{\log_k m_2 \ldots \log m_2} \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{(1+\eta_2)^2}{(\log_k m_2 \ldots \log m_2)^2}\frac{1}{\left(1+\frac{\lambda(1+\eta_2)}{\log_k m_2 \ldots \log m_2}\right)^2} \\ &= \log_{k+1} m_2 + \frac{1+\eta_2}{\log_k m_2 \ldots \log m_2} - \frac{1}{2}\frac{1+\eta_4}{(\log_k m_2 \ldots \log m_2)^2},\end{aligned}$$

avec $\lim \eta_4 = 0$ pour $m_2 = \infty$.

$$\log_{k+1}(m_1+\theta) = \log_{k+1} m_2 + \frac{1+\eta_5}{\log_k m_2 \ldots \log m_2},$$

où

$$\eta_5 = \eta_2 - \frac{1}{2}\frac{1+\eta_4}{\log_k m_2 \ldots \log m_2} = \left(\frac{1+\eta_3}{2} - \frac{1+\eta_4}{2}\right)\frac{1}{\log_k m_2 \ldots \log m_2},$$

$$\eta_5 = \frac{\eta_6}{\log_k m_2 \ldots \log m_2},$$

avec $\lim \eta_6 = 0$ pour $m_2 = \infty$.

Finalement

$$\log T \leqq \frac{m_2}{\rho}\frac{1+\eta_5}{\log_k m_2 \ldots \log m_2}.$$

Ici

$$x^\rho = \log_k(m_1+\theta) = \log_k m_2 + \frac{1+\eta_2}{\log_{k-1} m_2 \ldots \log m_2},$$

pour que

$$T \leqq e_{k+1}(x^{\rho+\varepsilon}),$$

il suffira

$$\log_{k+1} T \leqq x^{\rho+\varepsilon},$$

ou

$$\log_k \frac{m_2}{\rho} \frac{1+\eta_3}{\log_k m_2 \ldots \log m_2} < \log_k m_2 \leqq x^{\rho+\varepsilon} = \left(\log_k m_2 + \frac{1+\eta_2}{\log_{k-1} m_2 \ldots \log m_2}\right)^{1+\frac{\varepsilon}{\rho}}.$$

Il apparaît de suite que cette inégalité a lieu, même pour $\varepsilon = 0$, quand m_2 est assez grand.

Nous en concluons finalement :

Le terme maximum de la série

$$\sum \frac{x^m}{(\log_k m)^{\frac{m}{\rho}}}$$

est d'ordre $< e_{k+1}(x^\rho)$.

Comparons maintenant ce terme aux autres. Prenons le rapport d'un terme au suivant : c'est

$$\frac{x^m}{x^{m+1}} \frac{[\log_k(m+1)]^{\frac{m+1}{\rho}}}{[\log_k m]^{\frac{m}{\rho}}} = \left\{ \frac{\log_k(m+1)}{\log_k(m_1+\theta)} \left[\frac{\log_k(m+1)}{\log_k m}\right]^m \right\}^{\frac{1}{\rho}} = M^{\frac{1}{\rho}}.$$

On a

$$\left(\frac{\log_k(m+1)}{\log_k m}\right)^m > 1;$$

on aura donc

$$M > 3^\rho$$

si

$$\log_k(m+1) > 3^\rho \log_k(m_1+\theta).$$

Soit $m+1 = m_3$ la plus petite valeur de $m+1$ satisfaisant à cette inégalité : les termes d'indice $> m_3$ ont une somme

$$\leqq e_{k+1}(x^\rho)\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) = e_{k+1}(x^\rho)\,\frac{3}{2}.$$

La somme des termes précédents est

$$\leqq m_3 e_{k+1}(x^\rho).$$

Or, prenons

$$m+1 \geqq e_{k+1}(x^{\rho});$$

on aura

$$\log_{k+1}(m+1) \geqq e_1(x^{\rho}) = \log_{k-1}(m_1+\theta) > 3^{\rho}\log_k(m_1+\theta)$$

dès que m_1 est assez grand. Donc $m_2 \leqq e_{k+1}(x^{\rho})$.

Finalement, on voit que la somme des termes de la série est au plus égale à

$$\left(e_{k+1}(x^{\rho})+\frac{3}{2}\right)e_{k+1}(x^{\rho}) \leqq e_{k+1}(x^{\rho+\varepsilon})\,e_{k+1}(x^{\rho+\varepsilon'}) \leqq e_{k+1}(x^{\rho+\varepsilon''}),$$

même si $k=0$.

En effet, l'on a

$$e^{e^{x^{\rho+\varepsilon'}}}e^{e^{x^{\rho+\varepsilon}}} \leqq e^{e^{x^{\rho+\varepsilon'}}+e^{x^{\rho+\varepsilon}}} \leqq e^{e^{x^{\rho+\varepsilon_1}}},$$

ou

$$e_2(x^{\rho+\varepsilon'})\,e_2(x^{\rho+\varepsilon}) \leqq e_2(x^{\rho+\varepsilon_1}).$$

Admettons que l'on ait

$$e_k(x^{\rho+\varepsilon'})\,e_k(x^{\rho+\varepsilon}) \leqq e_k(x^{\rho+\varepsilon_1});$$

on aura

$$e_{k+1}(x^{\rho+\varepsilon'})\,e_{k+1}(x^{\rho+\varepsilon}) = e^{e_k(x^{\rho+\varepsilon'})+e_k(x^{\rho+\varepsilon})} \leqq e^{e_k(x^{\rho+\varepsilon''})} \leqq e_{k+1}(x^{\rho+\varepsilon_1}),$$

les ε, ε', ... désignant ici des quantités que l'on peut prendre aussi petites qu'on veut dès que x est assez grand. Nous en concluons finalement le lemme suivant :

LEMME I. — *La série*

$$\sum_{0}^{\infty} a_m x^m, \tag{1}$$

où, dès que m dépasse une certaine limite μ finie, les termes sont tels que

$$|a_m| \leqq \frac{1}{(\log_k m)^{\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)m}}, \qquad (k \geqq 1) \tag{2}$$

a son module au plus égal à

$$e_{k+1}(|x|^{\rho+\varepsilon_1}),$$

dès que $|x|$ dépasse une certaine limite finie ξ, ε_1 étant une quantité finie, positive, que l'on peut choisir aussi petite qu'on veut, pourvu que μ et ξ soient choisis suffisamment grands.

III.

Ce lemme va nous permettre d'étendre aux séries

$$\sum_0^\infty a_m x^m \tag{1}$$

le critère de régularité de croissance indiqué par nous pour les fonctions entières d'ordre fini.

Considérons la fonction

$$\sum_0^\infty a_m x^m,$$

et soit M_r le maximum du module de $\left|\sum_0^\infty a_m x^m\right|$ pour $|x| = r$.

Si, pour $|x| > \xi$, l'on peut trouver des nombres k_1 et ρ_1 tels que

$$e_{k_1+1}(r^{\rho_1-\varepsilon_1}) < M_r < e_{k_1+1}(r^{\rho_1+\varepsilon_1}), \tag{3}$$

quel que soit x, nous dirons que *la fonction* $\sum_0^\infty a_m x^m$ *est d'ordre* (k_1, ρ_1) *et à croissance régulière*. S'il y a une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes, pour lesquelles

$$e_{k_1+1}(r^{\rho_1-\varepsilon_1}) \leqq M_r \leqq e_{k_1+1}(r^{\rho_1+\varepsilon_1}),$$

si, pour toutes les valeurs de $|x| > \xi$, on a

$$M_r \leqq e_{k_1+1}(r^{\rho_1+\varepsilon_1}), \tag{4}$$

et si enfin il y a une infinité de valeurs de x de modules indéfiniment croissants pour lesquelles

$$M_r \leqq e_{k_2+1}(r^{\rho_2+\varepsilon_2}), \tag{5}$$

et telles que $k_2 < k_1$, ou $k_2 = k_1$ avec $\rho_1 - \rho_2$ fini et limité, nous dirons encore que *la fonction est d'ordre* (k_1, ρ_1), *mais à croissance irrégulière*.

Ceci posé, nous allons d'abord établir ce qu'on peut appeler la réciproque du lemme I.

Lemme II. — *Tout étant posé comme au lemme I, s'il y a dans la série* (1) *une infinité de valeurs de m telles que*

$$|a_m| \geqq \frac{1}{(\log_k m)^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)m}}, \tag{6}$$

il y a une infinité de valeurs de x telles que pour $|x| = r$

$$\left|\sum_0^\infty a_m x^m\right| \geqq e_{k+1}(r^{\rho-\varepsilon_1}).$$

Nous savons que l'on a toujours

$$\left|\sum_0^\infty a_m x^m\right| \leqq e_{k+1}(r^{\rho+\varepsilon}),$$

d'après le lemme I.

Supposons que, pour $|x| = r$ assez grand,

$$(6\,bis) \qquad M_r \leqq e_{k+1}(r^\sigma),$$

avec $\rho - \sigma$ fini si grand que soit r et quel que soit r : on sait [1] que

$$(7) \qquad |a_m| \leqq \frac{M_r}{r^m} = \frac{e_{k+1}(r^\sigma)}{r^m}.$$

Donnons à m une valeur telle que

$$|a_m| \geqq \frac{1}{(\log_k m)^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)m}},$$

d'après (6), et à r la valeur

$$r = (\log_k m)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

On a, d'après (7),

$$e_{k+1}(\log_k m) \times (\log_k m)^{m\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} \geqq (\log_k m)^{\frac{m}{\sigma}},$$

ou

$$e^m \times (\log_k m)^{m\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} \geqq (\log_k m)^{\frac{m}{\sigma}},$$

ce qui est impossible, $\rho - \sigma$ étant fini > 0. On en conclut donc que, pour $r = (\log_k m)^{\frac{1}{\sigma}}$, (6 *bis*) est impossible, et que $M_r > e_{k+1}(r^\sigma)$.

D'abord ceci démontre le lemme II ; de plus *on a une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes telles que* $e_{k+1}(r^{\rho+\varepsilon}) \geqq M_r \geqq e_{k+1}(r^{\rho-\varepsilon})$, *si petit*

---

[1] Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 62. L'inégalité $|a_m| \leqq \frac{M_r}{r^m}$ est, en effet, vraie pour une fonction entière absolument quelconque.

que soit ε *fini, à savoir les valeurs* [1] $r = (\log_k m)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon'}$, *où* m *satisfait à* (6) (ε' *positif aussi petit qu'on veut*). C. Q. F. D.

Admettons maintenant que la fonction $\sum_0^\infty a_m x^m$ *soit à croissance irrégulière*. On a toujours

$$(7\ bis) \qquad |a_m| \leqq \frac{M_r}{r^m},$$

quel que soit r.

Soient m, $m + \theta$ ($\theta \geqq 1$) deux valeurs consécutives de l'indice m satisfaisant à (6), les valeurs intermédiaires n'y satisfaisant pas : nous allons trouver une limite inférieure de θ en fonction de m.

Soit l'équation

$$(8) \qquad r^{\sigma_r} = \log_k \mu \qquad (\mu \text{ assez grand}),$$

---

[1] En effet, (7) donne pour

$$r = (\log_k m)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon'}, \qquad M_r = e_{k+1}(r^{\sigma_r}),$$

et

$$|a_m| = \frac{1}{(\log_k m)^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon_1\right)m}},$$

$$e_{k+1}\left[(\log_k m)^{\sigma_r\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon'\right)}\right] \times (\log_k m)^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon_1\right)m} \geqq (\log_k m)^{m\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon'\right)}.$$

On peut prendre, pour m assez grand, $|\varepsilon_1| < \eta$ (η aussi petit qu'on veut, mais fini et déterminé). Prenons $\varepsilon' = 2\eta$. Si $\sigma_r\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon'\right) \leqq 1$, $(\log_k m)^{\sigma_r\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon'\right)} \leqq \log_k m$,

$$e_{k+1}\left[(\log_k m)^{\sigma_r\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon'\right)}\right] \leqq e_{k+1}(\log_k m) = e^m.$$

Il faudrait

$$e^m \geqq (\log_k m)^{m(\varepsilon'-\varepsilon_1)} = (\log_k m)^{m(2\eta-\varepsilon_1)} > (\log_k m)^{m\eta},$$

ce qui est impossible pour m assez grand.

Donc

$$\sigma_r\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon'\right) = \sigma_r\left(\frac{1}{\rho}+2\eta\right) > 1,$$

et σ_r *diffère d'aussi peu qu'on veut de* $\frac{1}{\rho}$ (lemme I).

où

$$(9) \qquad r^{\sigma_r} = \log_{k+1} M_r.$$

Quand r varie d'une manière continue, il en est de même de M_r et de r^{σ_r}, par suite aussi de la valeur μ. Nous savons que, pour $\mu = m$, il y a une solution telle que $\rho - \sigma_r = \varepsilon_1$ (ε_1 tendant vers o quand m croît indéfiniment), avec $r = (\log_k m)^{\frac{1}{\sigma_r}} = (\log_k m)^{\frac{1}{\rho - \varepsilon_1}}$. De même pour $\mu = m + \theta$, $\rho - \sigma_r = \varepsilon'_1$, $r = (\log_k[m + \theta])^{\frac{1}{\rho - \varepsilon'_1}}$.

Si r croît de o à $+\infty$, sans être astreint à satisfaire à (8), r^{σ_r} croît indéfiniment (constamment ou non), et varie d'une manière continue. Pour chaque valeur de μ, (8) a donc une solution r qui varie d'une manière continue avec μ. A toute valeur de μ correspond une valeur de r au moins ; et, réciproquement, à chaque valeur de r en correspond une de μ.

La fonction $\sum_0^\infty a_m x^m$ a, par hypothèse, sa croissance irrégulière : il y a donc une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes, pour lesquelles $\rho - \sigma_r \geqq \zeta$ (ζ fini, positif, limité inférieurement). Les valeurs de μ correspondantes ne peuvent satisfaire à (6), sans quoi r serait de la forme $(\log_k m)^{\frac{1}{\sigma}}$, et le raisonnement du lemme II conduit à une impossibilité : ces valeurs de μ sont ainsi comprises entre deux nombres de la forme m et $m + \theta$, avec $m < \mu < m + \theta$; elles croissent d'ailleurs indéfiniment, *car on peut se borner à considérer des valeurs de r correspondantes telles que* $\rho - \zeta$ *soit fini*.

Finalement, nous voyons que *nous pouvons déterminer une infinité d'intervalles* m, $m + \theta$ *tels que l'on peut y trouver un intervalle plus petit* μ_1, μ_2, *et que, quand* μ *varie entre* μ_1 *et* μ_2 *dans* (8), $\rho - \sigma_r \geqq \zeta$ (*ζ fini, positif, limité inférieurement et déterminé, quels que soient* m *et* μ, *dans ces intervalles*), *pourvu que la fonction* $\sum_0^\infty a_m x^m$ *soit à croissance irrégulière.*

Prenons une de ces valeurs μ, et soit $\mu = m + \lambda$ (λ positif $< \theta$).

D'après (7 *bis*), (8) et (9),

$$\frac{1}{(\log_k m)^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)m}} \leqq \frac{M_r}{r^m} = \frac{e^\mu}{(\log_k \mu)^{\frac{m}{\sigma_r}}} \leqq \frac{e^\mu}{(\log_k \mu)^{\frac{m}{\sigma}}},$$

avec $\sigma_r \leqq \sigma = \rho - \zeta$ (ζ fini, limité inférieurement quel que soit m). Il faudra donc

$$(\log_k \mu)^{\frac{m}{\sigma}} \leqq e^\mu (\log_k m)^{\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)m},$$

ou

$$m X_\mu = \frac{m}{\sigma}\log_{k+1}\mu - \mu - \left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right) m \log_{k+1} m \leqq 0.$$

Pour $\mu = m$ ceci n'a lieu que si $\rho - \sigma = \varepsilon_1$ (ε_1 petit), ce que nous savions déjà : soit $\mu = m(\log_{k+1} m)^{1+\alpha}$.

On a

$$X_\mu = \frac{1}{\sigma}\log_{k+1}[m(\log_{k+1} m)^{1+\alpha}] - (\log_{k+1} m)^{1+\alpha} - \left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)\log_{k+1} m.$$

Or

$$\log_{k+1}[m(\log_{k+1} m)^{1+\alpha}] = \log_k[\log m + (1+\alpha)\log_{k+2} m];$$

de plus

$$\log_k(x+h) = \log_k x + \frac{h}{1}\,\frac{1}{\log_{k-1} x \log_{k-2} x \ldots x}(1+\eta), \qquad k \geqq 1.$$

En effet, soit

$$F(x) = \log_k x,$$

$$F'(x) = \frac{1}{\log_{k-1} x \log_{k-2} x \ldots x},$$

$$\log F'(x) = -(\log_k x + \ldots + \log x),$$

$$\frac{F''(x)}{F'(x)} = -\left(\frac{1}{\log_{k-1} x \ldots x} + \ldots + \frac{1}{x}\right).$$

$$F''(x_1 + \theta_1 h) = -F'(x+\theta_1 h)\left[\frac{1}{\log_{k-1}(x+\theta_1 h)\ldots(x+\theta_1 h)} + \ldots + \frac{1}{x+\theta_1 h}\right],$$

$$F'(x+\theta_1 h) = \frac{1}{\log_{k-1}(x+\theta_1 h)\ldots(x+\theta_1 h)} < F'(x),$$

puisque θ_1 est positif. Donc

$$\frac{h}{2}|F''(x+\theta_1 h)| < \frac{2h}{x} F'(x),$$

et, ici,

$$\frac{h}{x} = \frac{(1+\alpha)\log_{k+2} m}{\log m}$$

tend vers o avec $\frac{1}{m}$ si α est limité. Dès lors

$$\log_k(x+h) = \log_k x + \frac{h}{1} \frac{1}{\log_{k-1} x \ldots x}(1+\eta_1),$$

η_1 tendant vers o quand x croît indéfiniment;

$$\log_k[\log m + (1+\alpha)\log_{k+2} m] = \log_{k+1} m + \frac{(1+\alpha)\log_{k+2} m}{\log_k m \ldots \log m}(1+\eta_1),$$

$$X_\mu = \frac{1}{\sigma}\log_{k+1} m + \frac{(1+\alpha)(1+\eta_1)\log_{k+2} m}{\sigma \log_k m \ldots \log m} - (\log_{k+1} m)^{1+\alpha} - \left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon\right)\log_{k+1} m.$$

Il en résulte immédiatement que : 1° pour m assez grand et $\alpha < 0$, $|\alpha|$ étant aussi petit qu'on veut, mais donné, X_μ est positif, quel que soit α; 2° pour m assez grand et $\alpha > 0$, X_μ est négatif quel que soit α, pour chaque valeur de α donnée *a priori*.

Par conséquent, la condition $X_\mu \leqq 0$ exige que l'on n'ait pas α fini < 0, et l'on en conclut que la fonction $\sum_0^\infty a_m x^m$ ne peut avoir sa croissance irrégulière que si l'on a $\alpha \geqq 0$, ou $\alpha < 0$, $|\alpha|$ tendant vers o avec $\frac{1}{m}$. D'où ce théorème :

Théorème I. — *Soit*

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty a_m x^m \tag{1}$$

une fonction entière d'ordre infini (k, ρ), *où* ρ *est fini : on sait qu'il y a, pour* m *assez grand, une infinité de coefficients* a_m *tels que*

$$\sqrt[m]{a_m} = \frac{1}{(\log_k m)^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon}} \tag{2}$$

($|\varepsilon|$ *aussi petit qu'on veut, dès que m est assez grand*), *les autres étant plus petits que ne l'indique cette formule.*

Si θ *est un nombre positif qui croît moins vite avec m que*

$$m(\log_{k+1} m)^{1-\beta} - m$$

(β *positif, aussi petit qu'on veut, mais fini*), *et si, sur* θ *coefficients consécutifs à partir de* a_m, *il y en a toujours un satisfaisant à* (2) *dès que m dépasse une certaine limite, la fonction* $\varphi(x)$ *est à croissance régulière.*

Ce qui précède laisse de côté les fonctions d'ordre $(k, 0)$, $(k \geqq 1)$, c'est-à-dire les fonctions pour lesquelles max. $M_r (r \leqq r_1)$ croît plus vite avec r_1 que la quantité correspondante pour toute fonction d'ordre $(k-1, \rho)$ (ρ fini aussi grand qu'on veut) et moins vite que cette même quantité pour toute fonction d'ordre (k, ρ) (ρ fini aussi petit qu'on veut).

On peut classer encore ces fonctions intermédiaires en fonctions à croissance régulière et fonctions à croissance irrégulière.

DÉFINITION. — *Nous dirons qu'une pareille fonction est à croissance régulière et d'ordre* $(k, 0)$ *si l'on a constamment*

$$e^{r^\rho} > \log_k M_r > r^{\rho_1}$$

quels que soient ρ *et* ρ_1 *finis et r, dès que r dépasse une certaine limite. Elle sera à croissance irrégulière dans le cas contraire.*

Voyons d'abord à quels caractères on reconnaîtra une pareille fonction $f(x)$: quelle que soit la nature de sa croissance, $f(x)$ présentera pour m assez grand une infinité de coefficients a_m tels que

$$(10) \qquad (\log_{k-1} m)^{\frac{m}{\rho}} > |a_m^{-1}| > (\log_k m)^{\frac{m}{\rho_1}},$$

ρ étant arbitraire aussi grand qu'on veut, mais fini et ρ_1 arbitraire, aussi petit qu'on veut, mais fini [1].

---

[1] Quand $k = 0$ on devrait supprimer la première inégalité dans (10), en suppo-

Les autres coefficients a_m, s'il y en a, seront plus petits que ne l'indiquerait cette inégalité. Comparons alors les fonctions

$$f(x), \quad \sum_{\mu_1}^{\infty} \frac{x^{m_1}}{(\log_{k-1} m_1)^{\frac{m_1}{\rho}}}, \quad \sum_{\mu_1}^{\infty} \frac{x^{m_1}}{(\log_k m_1)^{\frac{m_1}{\rho_1}}},$$

ces deux dernières étant à croissance régulière et d'ordre $(k-1, \rho)$, (k, ρ_1).

Soient m, $m+\theta$ deux valeurs de m pour lesquelles (10) a lieu; admettons que $f(x)$ soit *à croissance irrégulière*, et que $\theta \leq m(\log_k m)^{1-\alpha} - m$ (α positif, aussi petit qu'on veut, mais fini). On a

$$(7\ bis) \qquad |a_m| \leq \frac{M_r}{r^m},$$

avec, pour une infinité de valeurs de r convenables,

$$M_r \leq e_k(r^\sigma)$$

(σ fini déterminé); d'où

$$\frac{1}{(\log_{k-1} m)^{\frac{m}{\rho}}} < |a_m| \leq \frac{e_k(r^\sigma)}{r^m},$$

quel que soit ρ, dès que m est assez grand.

---

sant $a^m \neq 0$ au moins pour une infinité de valeurs de m. Mais nous réservons pour le moment ce cas, en supposant ici $k \geq 1$.

Il n'est pas difficile de trouver des exemples de fonctions d'ordre $(k, 0)$: ainsi la série $\sum_{\mu_1}^{\infty} \frac{x^m}{(\log_{k-1} m)^{\frac{m}{\log_{k+i} m}}}$ $(i \geq 1)$ est d'ordre $(k, 0)$. En effet

$$(\log_{k-1} m)^{\frac{m}{\rho}} > (\log_{k-1} m)^{\frac{m}{\log_{k+i} m}} > (\log_k m)^{\frac{m}{\rho_1}},$$

dès que $i \geq 1$, car

$$\frac{m}{\log_{k+i} m} \log_k m > \frac{m}{\rho_1} \log_{k+1} m.$$

Posant

$$r^{\sigma_r} = \log_k \mathrm{M}_r = \log_{k-1} \mu,$$

le raisonnement du lemme II montre encore que σ_r ne peut être fini $\leqq \sigma$ que pour des valeurs de μ comprises entre m et $m + \theta$ [valeurs satisfaisant à (10)]; soit, pour une de ces valeurs μ, $\sigma_r \leqq \sigma$: pour cette valeur, l'inégalité ci-dessus est impossible, parce que $\theta \leqq m(\log_k m)^{1-\alpha} - m$, dès que $\rho - \sigma$ est fini, positif et supérieur à une limite donnée $\neq 0$, quel que soit r. Mais, σ étant donné, on peut toujours choisir ρ assez grand pour que ceci ait lieu, par conséquent pour que l'inégalité précédente soit impossible. Donc, on ne peut avoir $\mathrm{M}_r \leqq e_k(r^\sigma)$, pour aucune valeur du nombre σ positif limité, quand r est assez grand. On en conclut ce corollaire du théorème I.

Corollaire. — *Si $\varphi(x)$ est d'ordre $(k, 0)$ $(k > 0)$, on sait qu'il y a, pour m assez grand, une infinité de coefficients a_m tels que*

$$\frac{1}{(\log_k m)^{\frac{1}{\rho_1}}} > \sqrt[m]{a_m} > \frac{1}{(\log_{k-1} m)^{\frac{1}{\rho}}} \tag{10}$$

(ρ_1 aussi petit qu'on veut, ρ aussi grand qu'on veut), les autres étant plus petits que ne l'indique cette formule.

Si θ est un nombre positif qui croît au plus aussi vite avec m que $m(\log_k m)^{1-\alpha} - m$ (α positif aussi petit qu'on veut, mais fini), et si, sur θ coefficients consécutifs à partir de a_m, il y en a toujours un pour lequel (10) a lieu dès que m dépasse une certaine limite, la fonction $\varphi(x)$ est à croissance régulière.

IV.

Nous venons d'obtenir ainsi un critère de régularité : nous allons chercher maintenant un critère d'irrégularité. La marche à suivre est à peu près la même que pour les fonctions entières d'ordre fini ([1]); mais les

[1] *Ann. Fac. Toul.*, 1902, p. 449, et *Comptes rendus*, 1er septembre 1902.

calculs étant plus compliqués, il est nécessaire de les reprendre en détail.

Nous allons établir le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Tout étant posé comme au premier alinéa du théorème I, si* θ_2 *est un nombre positif satisfaisant à l'inégalité*

$$\log_{k+1}(m_1 + \theta_2) \geqq \nu_1 \log_{k+1} m_1,$$

($\nu_1 - 1$ *positif, aussi petit qu'on veut dès que* m_1 *est assez grand, mais fini*), *et s'il y a une infinité de valeurs de* m_1 *telles que, parmi les coefficients d'indices* $m_1, \ldots, m_1 + \theta_2$ *consécutifs, un au plus satisfait à la condition*

$$(12) \qquad \frac{1}{a_m} = (\log_k m)^{m\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon\right)},$$

dès que m_1 *dépasse une certaine limite fixe, la fonction* $\varphi(x)$ *est à croissance irrégulière.*

Soit la fonction

$$(11) \qquad \varphi(x) = \sum a_m x^m$$

d'ordre (k, ρ). A partir d'un certain terme, on peut toujours en trouver un au moins, sur θ' consécutifs (θ' fonction de m), qui soit de la forme

$$(12) \qquad \frac{1}{a_m} = (\log_k m)^{pm},$$

$p = \frac{1}{\rho} + \varepsilon$, ε tendant vers zéro avec $\frac{1}{m}$.

Supposons encore que les coefficients d'indices $m - 1, \ldots, m - \theta_1 + 1$,

$m+1, \ldots, m+\theta_2-1$ (θ_1, θ_2 positifs $\geqq 1$) soient de la forme

$$(13) \qquad \frac{1}{a_{m_1}} = (\log_k m_1)^{q m_1} \qquad (m_1 \text{ assez grand}),$$

avec

$$q = \frac{1}{\sigma'} + \varepsilon, \qquad \sigma' = \rho - \tau_1, \qquad q = p + \zeta,$$

τ_1, ζ finis positifs, limités inférieurement quels que soient m et m_1. Au contraire, nous supposerons que les coefficients d'indice $m-\theta_1$, $m+\theta_2$ soient de la forme (12).

Soit Ψ la somme des termes de (11) pour lesquels (13) a lieu : Ψ est une fonction entière d'ordre $<(k, \rho)$; pour que φ ait sa croissance irrégulière, il faudra et suffira que $\varphi - \Psi$ l'ait. Étudions donc cette dernière.

Pour une valeur donnée de m, p étant par suite parfaitement déterminé, posons

$$(13\ bis) \qquad x = y^p,$$

et prenons d'abord

$$(14) \qquad y = \log_k(m+\theta) = \log_k(m_1+\theta'),$$

avec

$$0 < \theta < \theta_2, \qquad m_1 \leqq m.$$

On a

$$a_{m_1} x^{m_1} = a_{m_1} y^{p m_1} = \frac{[\log_k(m_1+\theta')]^{p m_1}}{(\log_k m_1)^{p_1 m_1}}.$$

Considérons

$$e_{k+1}(x^\sigma) = e_{k+1}(y^{p\sigma}) = e_{k+1}\{[\log_k(m_1+\theta')]^{\sigma p}\},$$

avec

$$1 - p\sigma = 1 - \sigma_1 = \tau_1,$$

η_1 nombre positif fixe choisi arbitrairement aussi petit qu'on veut, dès que m_1 est assez grand.

Dès lors, nous allons vérifier que

$$\frac{[\log_k(m_1+\theta')]^{pm_1}}{(\log_k m_1)^{p_1 m_1}} < e_{k+1}\{[\log_k(m_1+\theta')]^{\sigma_1}\},$$

ou que

$$\psi(\theta') = -pm_1 \log_{k+1}(m_1+\theta') + p_1 m_1 \log_{k+1} m_1 + e_k\{[\log_k(m_1+\theta')]^{\sigma_1}\} > 0.$$

Prenant

$$(15) \qquad \left\{\begin{aligned} &[\log_k(m_1+\theta')]^{\sigma_1} = (\log_k m_1)^{1+\eta_1'}, \\ &\sigma_1 \log_{k+1}(m_1+\theta') = (1+\eta_1')\log_{k+1} m_1, \end{aligned}\right.$$

on aura, pour cette valeur de θ',

$$(16) \qquad e_k\{[\log_k m_1]^{1+\eta_1'}\} > \lambda m_1 \log_{k+1} m_1 \qquad (\lambda \text{ const. arbitraire}),$$

si

$$(\log_k m_1)^{1+\eta_1'} > \log_k[\lambda m_1 \log_{k+1} m_1],$$

$$(17) \qquad (1+\eta_1')\log_{k+1} m_1 > \log_k[\log m_1 + \log(\lambda \log_{k+1} m_1)].$$

Or (p. 18),

$$\log_k(x+h) = \log_k x + \frac{h}{1}\frac{1}{\log_{k-1} x \ldots x}(1+\eta_1'') \qquad (k \geqq 1),$$

si $\frac{h}{x}$ petit, avec $\lim \eta_1'' = 0$ pour $\frac{x}{h} = \infty$;

$$\log_k[\log m_1 + \log(\lambda \log_{k+1} m_1)] = \log_{k+1} m_1 + \frac{(1+\eta_1'')\log(\lambda \log_{k+1} m_1)}{\log_k m_1 \ldots \log m_1},$$

et (17) a lieu pour toute valeur de η_1' indépendante de m_1, finie, positive et $\neq 0$, quand m_1 est assez grand. Alors $\psi(\theta') > 0$, d'après (15) et (16).

D'autre part,

$$\psi'(\theta') = -pm_1 \frac{d}{d\theta'} \log_{k+1}(m_1+\theta')$$
$$+ e_k[\{\log_k(m_1+\theta')\}^{\sigma_1}]e_{k-1}[\ldots]\ldots e_1[\ldots]\sigma_1[\log_k(m_1+\theta')]^{\sigma_1-1} \frac{d}{d\theta'} \log_k(m_1+\theta'),$$

et, puisque

$$\frac{d}{d\theta'} \log_{k+1}(m_1+\theta') = \frac{1}{\log_k(m_1+\theta')} \frac{d}{d\theta'} \log_k(m_1+\theta') > 0, \quad \psi'(\theta') > 0,$$

si

$$e_k[\{\log_k(m_1+\theta')\}^{\sigma_1}] > \lambda_1 m_1 \qquad (\lambda_1 \text{ const. arbitraire}),$$

ce qui a lieu, d'après (15) et (16), pour toutes les valeurs de θ' au moins égales à celles qui satisfont à (15). Quand $m_1+\theta'$ est au moins égal à la valeur correspondant à (15), $\psi(\theta')$ est fonction croissante de θ', et, par suite, >0; la somme des modules des termes de $\varphi - \Psi$ d'indice $\leqq m$ se compose de deux parties, une $\leqq \lambda(m+\theta)^\mu$ pour les termes d'indices $\leqq \mu$ (μ nombre fini convenable), une des autres termes, au plus égale à

$$(17\ bis) \qquad me_{k+1}\{[\log_k(m+\theta)]^{\sigma_1}\} \leqq e_{k+1}\{[\log_k(m+\theta)]^{\sigma_1+\varepsilon}\}.$$

Étudions maintenant les termes de $\varphi - \Psi$ d'indice $> m$. Nous poserons

$$y = \log_k(m+\theta) = \log_k(m_1-\theta'), \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < \theta_2, \; m_1 > m.$$

On a

$$a_{m_1} y^{pm_1} = \frac{[\log_k(m_1-\theta')]^{pm_1}}{(\log_k m_1)^{p_1 m_1}}.$$

Nous voulons qu'on ait

$$(18) \qquad \frac{[\log_k(m_1-\theta')]^{pm_1}}{(\log_k m_1)^{p_1 m_1}} < e_{k+1}\{\log_k(m_1-\theta')]^{\sigma_1}\}.e^{-m_1},$$

ou

$$\chi_{\cdot}(\theta') = e_{k}\{[\log_k(m_1 - \theta')]^{\sigma_1}\} - m_1 + p_1 m_1 \log_{k+1} m_1 - p m_1 \log_{k+1}(m_1 - \theta') > 0.$$

Il suffira de prendre ici

$$(19) \qquad \log_{k+1}(m_1 - \theta') = \eta_3 \log_{k+1} m_1$$

($1 - \eta_3$ fini, positif, déterminé quel que soit m_1), pour que le premier membre de $\chi_{\cdot}(\theta')$ soit positif : le sera-t-il pour des valeurs de $m_1 - \theta'$ plus petites, c'est-à-dire, m_1 étant donné, pour des valeurs de θ' plus grandes? On a, si

$$X = \log_k(m_1 - \theta'),$$

$$\chi'_{\cdot}(\theta') = e_k(X^{\sigma_1}) e_{k-1}(X^{\sigma_1}) \ldots e_1(X^{\sigma_1}) \sigma_1 X^{\sigma_1 - 1} \frac{(-1)}{\log_{k-1}(m_1 - \theta') \ldots (m_1 - \theta')} + \frac{p m_1}{\log_k(m_1 - \theta') \ldots (m_1 - \theta')} > 0,$$

pourvu que

$$\sigma_1 e_k(X^{\sigma_1}) e_{k-1}(X^{\sigma_1}) \ldots e_1(X^{\sigma_1}) X^{\sigma_1} < [e_k(X^{\sigma_1})]^{1+\eta_1'''} < p m_1$$

(η_1''' fini, aussi petit que l'on veut quand m_1 est assez grand).

Il suffira donc

$$(20) \qquad \sigma_1 \log X = \sigma_1 \log_{k+1}(m_1 - \theta') < \log_{k+1}\left[(p m_1)^{\frac{1}{1+\eta_1'''}}\right]$$

et, quand

$$\log_{k+1}(m_1 - \theta') \leqq \eta_3 \log_{k+1} m_1,$$

a fortiori,

$$\sigma_1 \eta_3 \log_{k+1} m_1 < \log_{k+1}\left(p m_1^{\frac{1}{1+\eta_1'''}}\right).$$

Or

$$\left\{\begin{array}{l} \log \overline{pm_1}^{\frac{1}{1+\eta'''}} = \eta_4(\log p + \log m_1) = \eta_5 \log m_1, \\ \log_2 \overline{pm_1}^{\frac{1}{1+\eta'''}} = \quad \log \eta_5 + \log_2 m_1 \ = \eta_6 \log m_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

$\eta_4, \eta_5, \eta_6, \ldots$ différant d'aussi peu que l'on veut de 1, dès que m_1 est assez grand. Finalement (20) exigera seulement

$$\sigma_1 \eta_3 < \eta^{(\mathrm{IV})},$$

$\eta^{(\mathrm{IV})}$ différant d'aussi peu que l'on veut de 1; inégalité à laquelle il est toujours possible de satisfaire en prenant m assez grand, η_3 assez petit.

Alors $\chi_1(\theta')$ est fonction croissante de θ', c'est-à-dire m_1 étant donné, fonction décroissante de $m_1 - \theta'$. Par suite, $\chi_1(\theta')$ est bien > 0 pour les valeurs de θ' au moins égales à celle que détermine l'égalité (19), puisqu'il l'est pour cette valeur.

Les modules des termes de $\varphi - \Psi$ d'indices $> m$ sont alors tous plus petits que ceux de la série

$$e_{k+1}[\{\log_k(m_1 - \theta')\}^{\sigma_1}]\, e^{-m_1} = e_{k+1}[\{\log_k(m+\theta)\}^{\sigma_1}]\, e^{-m_1},$$

c'est-à-dire que leur somme est au plus égale à

$$(20\,bis) \qquad e_{k+1}[\{\log_k(m+\theta)\}^{\sigma_1}]\, \frac{e^{-m}}{1-\frac{1}{e}}.$$

Finalement, $|\varphi|$ et $|\varphi - \Psi|$ sont, d'après (13 *bis*), (14), (17 *bis*) et (20 *bis*), au plus égaux à $e_{k+1}\left(x^{\frac{\sigma_1+\varepsilon_1}{p}}\right) = e_{k+1}(x^{\sigma_1(\rho+\varepsilon)})$.

Il en résultera dès lors que φ a sa croissance irrégulière, pourvu que, d'après (15) et (19), l'on puisse avoir, pour une valeur de θ comprise

entre o et θ_2,

$$\log_{k+1}(m+\theta) \gtreqq \nu \log_{k+1} m,$$
$$\nu \log_{k+1}(m+\theta) \lesseqq \log_{k+1}(m+\theta_2)$$

($\nu - 1$ fini, positif, limité, aussi petit que l'on veut quand m assez grand), c'est-à-dire pourvu que

$$\log_{k+1}(m+\theta_2) \gtreqq \nu^2 \log_{k+1} m = \nu_1 \log_{k+1} m. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Nous nous dispenserons, pour le moment, d'étudier l'extension du théorème II au cas des fonctions d'ordre $(k, 0)$; si le besoin s'en révélait, il suffirait sans doute de s'appuyer sur ce qui précède en s'inspirant des raisonnements du corollaire du théorème I.

Remarque I. — *Les résultats des* § I *à* IV *s'étendent immédiatement au cas des fonctions* F(z) *quasi-entières d'ordre non transfini aux environs d'un point critique essentiel isolé, c'est-à-dire des fonctions monodromes* (1) *les plus générales d'ordre non transfini aux environs d'un point critique essentiel isolé, et,* a fortiori, *aux fonctions quasi-entières d'ordre non transfini proprement dites* (2).

Prenons, par exemple, pour point critique le point $z = \infty$. On a

$$F(z) = \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right) + \varphi(z),$$

$\varphi_0(u)$, $\varphi(u)$ étant des séries de Taylor ou Maclaurin procédant suivant les puissances croissantes de u : $\varphi(u)$ est, de plus, une fonction entière d'ordre non transfini.

---

(1) *Bull. Soc. math.*, 1903, p. 27 et *Ann. Fac. Toul.*, 1902, p. 455.
(2) *J. de Math.*, 1902, p. 356.

On a, de même,

$$F(z) = \frac{1}{z^k} Q(z)\, Q_0\left(\frac{1}{z}\right),$$

$Q_0\left(\frac{1}{z}\right)$ restant fini aux environs (ou dans le domaine) de $z = \infty$ et $Q(z)$ étant une fonction entière.

$F(z)$, $\varphi(z)$, $Q(z)$ sont simultanément d'ordre (k, ρ) non transfini, et en même temps à croissance régulière ou irrégulière.

La connaissance de $\varphi(z)$ ou de $Q(z)$ permettra donc l'application des lemmes et théorèmes qui précèdent.

Remarque II. — *Si les théorèmes* I *et* II *ou le corollaire du théorème* I *sont applicables à une fonction entière, ils le sont aussi à ses dérivées successives, comme le montre la considération des coefficients de ces dérivées.*

Les fonctions entières auxquelles s'appliquent les théorèmes I *et* II *et le corollaire du théorème* I *sont à croissance régulière ou irrégulière en même temps que toutes leurs dérivées.*

Ceci s'étend aux fonctions monodromes $F(z)$ *de la remarque* I, grâce à l'égalité

$$F(z) = \varphi_0\left(\frac{1}{z}\right) + \varphi(z).$$

V.

LES FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE ZÉRO.

Considérons les fonctions

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty \frac{x^m}{e_k(m)^{m\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon\right)}}.$$

Pour $k = 0$ [en posant $e_0(m) = m = \log_0 m$], on retrouve les fonctions

entières d'ordre fini ρ (à coefficients réels); pour $k \geqq 1$,

$$e_k(m)^{m\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} \geqq e^{m^2\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} = m^{\frac{m}{\sigma}},$$

avec

$$\frac{m}{\sigma}\log m = m^2\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right):$$

quand m croît indéfiniment, σ tend vers o; $\varphi(x)$ est une fonction entière d'ordre o. Cependant, il semble qu'une classification de ces fonctions, analogue à celle des fonctions entières d'ordre non transfini et $>$ o, soit possible. Les analogies sont *a priori* évidentes, mais on ne voit pas de suite un moyen commode de donner une expression asymptotique du maximum du module de $\varphi(x)$ pour $|x| = r$. La chose peut pourtant avoir de l'intérêt.

Nous prendrons, pour la classification des fonctions entières d'ordre o, des séries de comparaison de forme aussi simple que possible, à savoir les séries obtenues en faisant, dans $\varphi(x)$, $\varepsilon = 0$. Peut-être y aura-t-il lieu, par la suite, d'en prendre de plus compliquées, au moins en apparence : dans le cas de $k = 0$, $\rho = 1$, on serait conduit, en effet, à prendre comme série de comparaison $\sum \frac{x^m}{m^m}$ qui est plus compliquée que $e^x = \sum \frac{x^m}{m!}$. Mais le choix que nous faisons suffira pour le moment.

Nous poserons

$$\sum \frac{x^m}{e_k(m)^{\frac{m}{\rho}}} = \mathrm{E}(x, k, \rho).$$

On pourrait essayer d'appeler ces fonctions entières fonctions d'ordre $(0, k, \rho)$ (o rappelant l'ordre de ces fonctions au sens de M. Borel). $\mathrm{E}(1, k, \rho)$ croît évidemment avec x (x réel) et ρ, et décroît quand k croît.

Nous traiterons ici en détail le cas où $k = 1$. Quand $k > 1$, nous adopterons provisoirement une classification un peu plus sommaire [1].

---

[1] Nous l'avons complétée depuis (*Comptes rendus*, 1er février 1904, p. 262, et 15 février 1904, p. 410; *Journal de Mathématiques*, 1904).

Soient alors $\varphi(x)$ une fonction entière d'ordre o, M_r le maximum de son module pour $|x| = r$.

Définition. — 1° *Soit* $k = 1$:

Si l'on a, quel que soit $|x| = r$,

$$M_r < E(r, 1, \rho + \varepsilon),$$

ε *tendant vers* o *quand* r *croît indéfiniment, et si, pour une infinité de valeurs de* r *indéfiniment croissantes,*

$$M_r = E(r, 1, \rho - \varepsilon_1)$$

(ε_1 *analogue à* ε, *positif ou négatif*), *nous dirons que* $\varphi(x)$ *est d'ordre* $(0, 1, \rho)$.

2° *Soit* $k > 1$:

Si l'on a, quel que soit $|x| = r$,

$$M_r < E(r, k, \rho + \varepsilon)$$

pour une valeur finie de ρ, *et si, pour une infinité de valeurs de* r *indéfiniment croissantes,*

$$M_r = E(r, k, \rho - \varepsilon_1),$$

nous dirons que $\varphi(x)$ *est* d'indice k.

Nous suivrons alors la marche du § II.

Soit la série

$$\varphi(x) = \sum \frac{x^m}{e_k(m)^{m\left(\frac{1}{\rho_1} - \varepsilon\right)}},$$

avec $\frac{1}{\rho_1} - \varepsilon \geqq \frac{1}{\rho}$, $\left|\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}\right|$ aussi petit que l'on veut, mais fini, dès que $m \geqq \mu$; on a,

$$|\varphi(x)| \leqq \sum \frac{|x|^m}{e_k(m)^{\frac{m}{\rho}}} = E(|x|, k, \rho).$$

1° *Cas où* $k = 1$. — Soit la série

$$\varphi(x) = \sum \frac{x^m}{e^{m^2\left(\frac{1}{\rho_1} - \varepsilon\right)}};$$

on a

$$|\varphi(x)| \leqq \sum \frac{|x|^m}{e^{\frac{m^2}{\rho}}} = E(x, 1, \rho).$$

Soit

$$x = y^{\frac{1}{\rho}} = e^{\frac{m_1+\theta}{\rho}} \qquad (m_1 \text{ donné, } 0 \leqq \theta \leqq 1).$$

On a

$$T = \frac{x^m}{e^{\frac{m^2}{\rho}}} = e^{(m_1+\theta)\frac{m}{\rho} - \frac{m^2}{\rho}} = e^{\frac{m}{\rho}(m_1+\theta-m)}.$$

Cherchons le maximum de T ou celui de $\log T = \psi_m = \frac{m}{\rho}(m_1 + \theta - m)$, quand m varie.

On a

$$\psi'_m = \frac{1}{\rho}(m_1 + \theta - 2m).$$

La fonction ψ'_m est constamment décroissante : ψ'_m a au plus une racine réelle, et en a toujours une dès que m_1 est positif, ce que l'on suppose.

Soit m_2 la racine de ψ'_m : le maximum de ψ_m a lieu pour $m_2 = \frac{m_1+\theta}{2}$. Donc

$$T \leqq e^{\frac{1}{\rho}\left(\frac{m_1+\theta}{2}\right)^2} = x^{\frac{m_1+\theta}{4}} = x^{\frac{\rho \log x}{4}},$$

car

$$m_1 + \theta = \rho \log x.$$

Comparons maintenant dans la série

$$\varphi_1(x) = \sum \frac{x^m}{e^{\frac{m^2}{\rho}}}$$

un terme au suivant. Leur rapport est pour $x = e^{\frac{m_1+\theta}{\rho}}$

$$R = \frac{x^m}{x^{m+1}} \frac{e^{\frac{(m+1)^2}{\rho}}}{e^{\frac{m^2}{\rho}}} = e^{\frac{1}{\rho}(2m+1-m_1-\theta)}.$$

On a

$$e^{\frac{1}{\rho}(2m+1-m_1-\theta)} \geqq 3$$

dès que

$$2m+1-m_1-\theta \geqq \rho \log 3.$$

Soit m_3 la plus petite valeur de m, entière ou non, satisfaisant à cette inégalité. La somme des termes qui y satisfont est au plus égale à

$$x^{\frac{\rho \log x}{4}}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right) = \frac{3}{2} x^{\frac{\rho \log x}{4}}.$$

Ceux qui précèdent ont une somme au plus égale à

$$m_3 x^{\frac{\rho \log x}{4}}$$

et

$$m_3 \leqq \frac{m_1+\theta+\rho\log 3 - 1}{2} + 1 \leqq m_1 + \theta = \rho \log x$$

dès que m_1 est assez grand.

Le module de $\varphi_1(x)$ est au plus égal à

$$2\rho \log x\, x^{\frac{\rho}{4}\log x} \leqq x^{\frac{\rho+\varepsilon}{4}\log x}$$

dès que

$$2\rho \log x \leqq x^{\frac{\varepsilon}{4}\log x},$$

$$\log(2\rho\log x) \leqq \frac{\varepsilon}{4}(\log x)^2,$$

$$\varepsilon \geqq \frac{4\log(2\rho\log x)}{(\log x)^2}, \qquad \text{ou, } \textit{a fortiori}, \qquad \varepsilon \geqq \frac{\varepsilon_1}{\log x},$$

ε_1 positif, aussi petit que l'on veut pour x assez grand, mais fini. Donc :

La série $E(x, 1, \rho) = \sum \frac{x^m}{e^{\frac{m^2}{\rho}}}$ *a son module au plus égal à*

$$x^{\frac{\rho+\varepsilon}{4}\log x} = x^{\log x \frac{\rho+\varepsilon}{4}} \qquad \textit{ou à} \qquad x^{\frac{\rho}{4}(\log x + \varepsilon_1)},$$

ε *et* ε_1 *tendant vers* o *quand* x *croît indéfiniment.*

Dès lors :

LEMME I. — *La série* (¹)

$$(1_1) \qquad \varphi(x) = \sum_0^\infty a_m x^m,$$

où, dès que m *dépasse une certaine limite* μ *finie, les termes sont tels que*

$$(2_1) \qquad |a_m| \leqq \frac{1}{e^{m^2\left(\frac{1}{\rho}-\varepsilon\right)}},$$

(¹) M. Hadamard s'est déjà occupé des fonctions d'ordre o (Mémoire couronné, nº 6, *J. de Math.*, 1893). Il a donné pour toutes les fonctions entières une limite supérieure du module, en particulier pour les fonctions $\sum_0 q^{m^2} x^m$, c'est-à-dire pour les séries $E(x, 1, \rho)$.

a son module au plus égal à

$$|x|^{\frac{\rho+\varepsilon_1}{4}\log|x|}$$

dès que $|x|$ *dépasse une certaine limite finie* ξ (ε, ε_1 *finis, positifs, aussi petits que l'on veut, pourvu que* μ *et* ξ *soient choisis suffisamment grands*).

Cherchons à établir la réciproque.

Soit M_r le maximum de $|\varphi(x)|$ pour $|x| = r$. On a, pour r assez grand,

$$M_r \leqq r^{\frac{\rho+\varepsilon}{4}\log r}.$$

Supposons que l'on ait une infinité de valeurs de m telles que

$$(6_1) \qquad |a_m| \geqq \frac{1}{e^{m^2\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)}},$$

et que, pour $|x| = r$ assez grand, on ait toujours

$$M_r = r^{\frac{\sigma_r}{4}\log r} \leqq r^{\frac{\sigma}{4}\log r},$$

avec $\rho - \sigma$ fini et positif si grand que soit r et quel que soit r : on sait (¹) que

$$(7_1) \qquad |a_m| \leqq \frac{M_r}{r^m} = r^{\frac{\sigma_r}{4}\log r - m};$$

d'où

$$e^{-m^2\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} \leqq r^{\frac{\sigma_r}{4}\log r - m},$$

$$0 \leqq \left(\frac{\sigma_r}{4}\log r - m\right)\log r + m^2\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right) = X_{\sigma_r}(r) \leqq X_\sigma(r).$$

(¹) Borel, *Leç. sur les fonct. ent.*, p. 62, et p. 14 précédente.

Or

$$\frac{dX_\sigma}{dr} = X'_\sigma(r) = \frac{\sigma}{4}\frac{\log r}{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\sigma}{4}\log r - m\right) = 0$$

donne

$$\frac{\sigma}{2}\log r = m, \qquad r = e^{\frac{2m}{\sigma}}.$$

Pour cette valeur de r,

$$X_\sigma(r) = m^2\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon\right) + \frac{2m}{\sigma}\left(-\frac{m}{2}\right) = m^2\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon - \frac{1}{\sigma}\right),$$

qui est < 0. On est conduit à une impossibilité; donc :

Lemme II. — *Tout étant posé comme au lemme* I, *s'il y a dans la série* (1_1) *une infinité de valeurs de* m *telles que*

$$(6_1) \qquad |a_m| \geqq \frac{1}{e^{m^2\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon\right)}},$$

il y a une infinité de valeurs de x *telles que, pour* $|x| = r$,

$$\left|\sum_0^\infty a_m x^m\right| \geqq r^{\frac{\rho - \varepsilon}{4}\log r}.$$

En particulier, soit $\sigma = \rho - \varepsilon_1$; la démonstration précédente donne

$$\frac{1}{\rho} + \varepsilon - \frac{1}{\rho - \varepsilon_1} \geqq 0,$$

$$\rho - \varepsilon_1 + \varepsilon\rho(\rho - \varepsilon_1) - \rho \geqq 0,$$

$$\varepsilon_1 \leqq \varepsilon\rho(\rho - \varepsilon_1) < \varepsilon\rho^2,$$

$$X_{\sigma_r}\left(e^{\frac{2m}{\sigma}}\right) \geqq 0, \qquad \sigma_r \geqq (\rho - \varepsilon_1)\left[1 - \varepsilon\rho + \frac{\varepsilon_1}{\rho} + \varepsilon\varepsilon_1\right].$$

pour

$$r = e^{\frac{2m}{\rho - \varepsilon_1}}, \qquad \varepsilon_1 < \varepsilon\rho^2.$$

Croissance régulière ou irrégulière des séries (1_1). — On peut aussi étendre aux séries (1_1) la notion de croissance régulière ou irrégulière.

Si, pour $r = |x| > \xi$, on peut trouver un nombre ρ fixe tel que

$$r^{\frac{\rho-\varepsilon}{4}\log r} < \mathrm{M}_r < r^{\frac{\rho+\varepsilon}{4}\log r},$$

quel que soit x, nous dirons que *la fonction* $\varphi(x) = \sum a_m x^m$ *est d'ordre* $(0, 1, \rho)$ *et à croissance régulière.*

S'il y a, quel que soit x, une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes, pour lesquelles

$$r^{\frac{\rho-\varepsilon}{4}\log r} < \mathrm{M}_r < r^{\frac{\rho+\varepsilon}{4}\log r};$$

si, pour toutes les valeurs de $r > \xi$, on a

$$(4_1) \qquad \mathrm{M}_r \leqq r^{\frac{\rho+\varepsilon}{4}\log r},$$

et si, enfin, il y a une infinité de valeurs de x de modules indéfiniment croissants pour lesquelles

$$\mathrm{M}_r = r^{\frac{\sigma}{4}\log r}$$

avec $\rho - \sigma$ fini, positif et limité inférieurement, nous dirons que *la fonction* $\varphi(x)$ *est d'ordre* $(0, 1, \rho)$, *mais à croissance irrégulière.*

Nous allons chercher un critère de croissance régulière.

Admettons que $\varphi(x)$ soit à croissance irrégulière. On a toujours

$$(7_1\ bis)\qquad |a_m| < \frac{M_r}{r^m},$$

quel que soit r.

Soient $m-\theta$, $m(\theta \geqq 1)$ deux valeurs consécutives de l'indice m satisfaisant à (6_1) : nous allons trouver une limite inférieure de θ en fonction de m.

Soit l'équation

$$(8_1)\qquad r^{\sigma_r} = e^{2\mu}, \qquad \sigma_r \log r = 2\mu,$$

où

$$(9_1)\qquad r^{\frac{\sigma_r}{4}\log r} = M_r.$$

Quand r varie d'une manière continue, il en est de même de M_r et de r^{σ_r}, par suite aussi de la valeur μ. Nous savons que, pour $\mu = m$, il y a une solution telle que $\rho - \sigma_r = \varepsilon_2$. La fonction étant à croissance irrégulière, on peut prendre $\sigma_r = \sigma$, avec $\rho - \sigma$ fini positif, pour une valeur de μ comprise entre deux coefficients d'indices analogues à $m-\theta$ et m. Supposons que ce soit entre $m-\theta$ et m. Il faut

$$e^{-m^2\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} < r^{\frac{\sigma}{4}\log r - m} = e^{2\mu\left(\frac{\log r}{4} - \frac{m}{\sigma}\right)},$$

$$0 < \frac{\mu \log r}{2} - \frac{2\mu m}{\sigma} + m^2\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon\right)$$

ou

$$0 < \frac{\mu^2}{\sigma} - \frac{2\mu m}{\sigma} + m^2\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon\right).$$

Pour $\mu = 0$ ou $= +\infty$, le deuxième membre est positif : pour

$\mu = m\lambda$,

$$0 < \frac{m^2}{\sigma}(\lambda^2 - 2\lambda + 1) + m^2\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon - \frac{1}{\sigma}\right),$$

$$0 < (\lambda - 1)^2 + \sigma\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon\right) - 1,$$

$$(\lambda - 1)^2 > 1 - \sigma_1, \qquad \text{avec} \qquad \sigma_1 = \sigma\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon\right) < 1,$$

$1 - \sigma_1$ positif et fini pour une infinité de valeurs de x croissant indéfiniment; on ne peut avoir

$$1 - \sqrt{1 - \sigma_1} < \lambda < 1 + \sqrt{1 - \sigma_1}.$$

En d'autres termes, λ ne peut tendre vers 1 quand m croît indéfiniment.

THÉORÈME III. — *Soit*

$$(1_1) \qquad \varphi(x) = \sum_0^\infty a_m x^m$$

une fonction entière d'ordre $(0, 1, \rho)$, *où* ρ *est fini : on sait qu'il y a, pour* m *assez grand, une infinité de coefficients* a_m *tels que*

$$(2_1) \qquad \sqrt[m]{|a_m|} \geqq e^{-m\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon\right)}$$

(ε *aussi petit que l'on veut, mais fini*), *les autres étant plus petits que ne l'indique cette formule, au moins à partir d'un certain rang.*

Soient m_1, m_2 $(m_2 > m_1)$ *deux indices de coefficients satisfaisant à* (2_1), *aucun coefficient* a_m *d'indice compris entre* m_1 *et* m_2 *n'y satisfaisant. Si* $\lim \frac{m_2}{m_1} = 1$ *quand* m_1 *croît indéfiniment,* $\varphi(x)$ *est à croissance régulière.*

Cas où $k > 1$. — Dans le cas où $k > 1$, les mêmes méthodes ne donnent pas des résultats aussi complets.

Soit la série

$$\varphi(x) = \sum \frac{x^m}{[e_k(m)]^{\frac{m}{\rho}}}, \qquad k > 1,$$

$$(10_1) \qquad x = y^{\frac{1}{\rho}} = [e_k(m_1 + \theta)]^{\frac{1}{\rho}}.$$

On a

$$(11_1) \qquad T = \frac{x^m}{e_k(m)^{\frac{m}{\rho}}} = \left[\frac{e_k(m_1+\theta)}{e_k(m)}\right]^{\frac{m}{\rho}}$$

(m_1 donné, $0 \leq \theta \leq 1$). Cherchons son maximum ou celui de

$$\log T = \psi_m = \frac{m}{\rho}[e_{k-1}(m_1+\theta) - e_{k-1}(m)].$$

On a

$$(12_1) \quad \psi'_m = \frac{1}{\rho}[e_{k-1}(m_1+\theta) - e_{k-1}(m)] - \frac{m}{\rho} e_{k-1}(m) \ldots e_1(m).$$

La fonction ψ'_m est constamment décroissante : ψ'_m a, au plus, une racine réelle, et en a toujours une dès que m_1 est assez grand. Soit m_2 cette racine :

$$e_{k-2}(m_2) + \zeta = e_{k-2}(m_1 + \theta),$$

$$0 = \rho\psi'_{m_2} = e_{k-1}(m_2)(e^\zeta - 1) - m_2 e_{k-1}(m_2) \ldots e_1(m_2),$$

$$e^\zeta = 1 + e_{k-2}(m_2) \ldots e_1(m_2) m_2;$$

$$\log T = \psi_{m_2} = \frac{m_2}{\rho} e_{k-1}(m_2)(e^\zeta - 1) = \frac{m_2}{\rho} e_{k-1}(m_2) \ldots e_1(m_2) m_2.$$

Or

$$\begin{aligned}\log x &= \frac{1}{\rho} e_{k-1}(m_1+\theta) = \frac{1}{\rho} e_{k-1}(m_2) e^{\zeta}\\ &= \frac{1}{\rho} e_{k-1}(m_2)\left[1+e_{k-2}(m_2)\ldots e_1(m_2) m_2\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_k x &= (1+\varepsilon)\log_{k-1}(\rho\log x)\\ &= (1+\varepsilon)\log_{k-1}\left\{e_{k-1}(m_2)\left[1+e_{k-2}(m_2)\ldots m_2\right]\right\}\\ &= (1+\varepsilon)\log_{k-1}\left[e_{k-1}(m_2)\right]^{1+\varepsilon'},\end{aligned}$$

et, puisque $k>1$,

$$\log_k(x) = (1+\varepsilon'') m_2.$$

Dès lors

$$(13_1)\quad \left\{\begin{aligned}\log T &= \frac{m_2^2}{\rho} e_{k-1}(m_2)\ldots e_1(m_2)\\ &= (\log x)(1+\varepsilon_1)\frac{\log_k x}{1+\varepsilon''} = (1+\varepsilon_2)\log x \log_k x.\end{aligned}\right.$$

Nous obtenons ainsi

$$T = x^{(1+\varepsilon_2)\log_k x},$$

valeur asymptotique où ρ ne figure plus.

Comparons maintenant un terme au suivant; leur rapport est

$$R_m = \frac{x^m}{x^{m+1}}\,\frac{e_k(m+1)^{\frac{m+1}{\rho}}}{e_k(m)^{\frac{m}{\rho}}} = \frac{e_k(m+1)^{\frac{m+1}{\rho}}}{e_k(m)^{\frac{m}{\rho}}}\,\frac{1}{e_k(m_1+\theta)^{\frac{1}{\rho}}}$$

pour la même valeur de x que ci-dessus. On a

$$\log R_m = \frac{m+1}{\rho} e_{k-1}(m+1) - \frac{m}{\rho} e_{k-1}(m) - \frac{1}{\rho} e_k(m_1+\theta).$$

Pour une valeur donnée de $m_1+\theta$, prenons la dérivée par rapport

à m :

$$\rho\frac{R'_m}{R_m} = e_{k-1}(m+1) - e_{k-1}(m) + (m+1)e_{k-1}(m+1)\dots e_1(m+1)$$
$$- m e_{k-1}(m)\dots e_1(m).$$

R'_m est toujours positif. R_m est toujours croissant avec m; $\log R_m$, d'abord négatif, devient positif. On aura

$$\log R_m > \log\lambda \qquad (\lambda \text{ fini} > 1 \text{ quelconque})$$

dès que m est assez grand et $> m_3$.

Ici

$$x = [e_k(m_1+\theta)]^{\frac{1}{\rho}}, \qquad \log x = \frac{1}{\rho} e_{k-1}(m_1+\theta),$$
$$\rho \log R_m = (m+1)e_{k-1}(m+1) - m e_{k-1}(m) - \rho\log x > \rho\log\lambda.$$

Ceci a lieu dès que $m \geqq \log_{k-1} x$, car $\log R_m$ croissant avec m, il suffit

$$(1+\log_{k-1}x)e_{k-1}(1+\log_{k-1}x) - x\log_{k-1}x - \rho\log x > \rho\log\lambda,$$

ou, *a fortiori*,

$$e_{k-1}(1+\log_{k-1}x) - \rho\log x > \rho\log\lambda,$$

ce qui se trouve vrai pour $|x|$ assez grand. On pourra donc prendre $m_3 < \log_{k-1} x$.

Soit T la plus grande valeur du module d'un terme de $\varphi(x)$:

$$T = x^{(1+\varepsilon_2)\log_k x}.$$

Les termes d'indice $\leqq m_3$ ont une somme de module

$$\leqq (1+m_3)x^{(1+\varepsilon_2)\log_k x} \leqq \log_{k-1}x \cdot x^{(1+\varepsilon'_2)\log_k x}.$$

Les termes d'indice $> m_1$ ont une somme dont le module est au plus égal à

$$\frac{T}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} + \dots\right) = \frac{T}{\lambda - 1}.$$

Donc

$$|\varphi(x)| \leqq \left(\frac{1}{\lambda - 1} + \log_{k-1} x\right) x^{(1+\varepsilon'_2)\log_k x} \leqq x^{(1+\varepsilon'_2+\varepsilon_3)\log_k x}.$$

Finalement :

Lemme I *bis*. — *La série*

$$(1, bis) \qquad \varphi(x) = \sum_0^\infty a_m x^m$$

où, dès que m dépasse une certaine limite μ finie, les termes sont tels que

$$(2, bis) \qquad |a_m| \leqq \frac{1}{e_k(m)^{\left(\frac{1}{\rho} - \varepsilon\right)m}}$$

a son module au plus égal à $r^{(1+\varepsilon_1)\log_k r}$ pour $|x| = r$, dès que r dépasse une certaine limite finie ξ.

Enfin, on peut encore établir la réciproque de ce lemme :

Lemme II *bis*. — *Tout étant posé comme au lemme I bis, s'il y a dans la série (1, bis) une infinité de valeurs de m telles que*

$$(6, bis) \qquad |a_m| \geqq e_k(m)^{-m\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon\right)},$$

il y a une infinité de valeurs de x telles que, pour $|x| = r$,

$$\left|\sum_0^\infty a_m x^m\right| \geqq r^{(1-\varepsilon)\log_k r}.$$

En effet, soit M_r le maximum de $|\varphi(x)|$ pour $x = r$. On a, pour r assez grand,

$$M_r \leqq r^{(1+\varepsilon_1)\log_k r}.$$

Supposons qu'on ait une infinité de valeurs de m telles que (6, *bis*) ait lieu, et que, pour $|x| = r$ assez grand, on ait toujours

$$M_r = r^{\sigma_r \log_k r}, \qquad \sigma_r \leqq \sigma,$$

avec $1 - \sigma$ fini positif si grand que soit r, et quel que soit r : on sait que

$$(7, bis) \qquad e_k(m)^{-m\left(\frac{1}{\rho}+\varepsilon\right)} \leqq |a_m| \leqq \frac{M_r}{r^m} \leqq r^{\sigma \log_k r - m}.$$

Il faudra donc

$$\chi(r) = \sigma \log_k r \log r - m \log r + m\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon\right) e_{k-1}(m) \geqq 0.$$

m étant donné, pour de petites et de grandes valeurs de r, $\chi(r)$ est positif :

$$\chi'(r) = \frac{\sigma}{r} \log_k r + \frac{\sigma \log r}{\log_{k-1} r \ldots \log r . r} - \frac{m}{r} = \frac{\sigma}{r}\left(\log_k r - \frac{m}{\sigma} + \frac{1}{\log_{k-1} r \ldots \log_2 r}\right).$$

$\chi'(r)$ est négatif pour r petit, positif pour r grand ; donc $\chi(r)$ a certainement un minimum. Prenons

$$\log_k r - \frac{m}{\sigma} = -1, \qquad \log r = e_{k-1}\left(\frac{m}{\sigma} - 1\right) :$$

$$\chi(r) = m\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon\right) e_{k-1}(m) - \sigma \log r\left(\frac{m}{\sigma} - \log_k r\right)$$
$$= m\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon\right) e_{k-1}(m) - \sigma e_{k-1}\left(\frac{m}{\sigma} - 1\right).$$

Ceci est < 0 pour m assez grand. En effet, c'est évident quand $k = 2$; on a même, pour $k = 2$,

$$m^2 e_1(m) < e_1\left(\frac{m}{\sigma} - 1\right).$$

Admettons que, pour $k \geqq 3$,

$$m^2 e_{k-2}(m) < e_{k-2}\left(\frac{m}{\sigma} - 1\right):$$

je dis qu'on aura

$$m^2 e_{k-1}(m) < e_{k-1}\left(\frac{m}{\sigma} - 1\right);$$

car il suffit

$$\log m^2 + e_{k-2}(m) < m^2 e_{k-2}(m) < e_{k-2}\left(\frac{m}{\sigma} - 1\right).$$

Par conséquent, pour

$$r = e_k\left(\frac{m}{\sigma} - 1\right),$$

$\chi(r) < 0$, contrairement à (7_1 *bis*), et le lemme II *bis* se trouve établi.

Le même raisonnement montre que, pour cette valeur de r, $M_r > r^{\sigma \log_k r}$. Donnons à r la valeur

$$r = e_k\left(\frac{m}{\sigma_1} - 1\right) \qquad (1 > \sigma_1 > \sigma):$$

$$\chi(r) = m\left(\frac{1}{\rho} + \varepsilon\right) e_{k-1}(m) - \sigma e_{k-1}\left(\frac{m}{\sigma_1} - 1\right)\left(\frac{m}{\sigma} - \frac{m}{\sigma_1} + 1\right).$$

Si $\sigma_1 - \sigma$ fini, ainsi que $1 - \sigma_1$, on a une impossibilité pour m assez grand, si petits que soient $1 - \sigma_1$ et $\sigma_1 - \sigma$. Donc, quand $1 - \sigma_1$ est très petit, il faut aussi $\sigma_1 - \sigma$ très petit, c'est-à-dire que l'on a *une infinité de valeurs de r indéfiniment croissantes telles que*

$$r^{(1+\varepsilon)\log_k r} > M_r > r^{(1-\varepsilon)\log_k r},$$

à savoir les valeurs

$$r = e_k\left(\frac{m}{1-\varepsilon_1} - 1\right),$$

où a_m est un quelconque des coefficients (6_1 *bis*) (¹).

Remarque I. — Il est à peine utile de faire observer que tous les lemmes ou théorèmes précédents relatifs aux fonctions entières d'ordre o s'étendent aux fonctions monodromes aux environs d'un point singulier

---

(¹) *Indication de sujets d'études.* — On peut encore essayer de classer les fonctions entières $\varphi(x)$, d'ordre o et d'indice k, en fonctions à croissance régulière et irrégulière. En cas de besoin, on trouvera dans ce qui précède des indications probablement suffisantes.

Si l'on veut chercher à classer les fonctions d'ordre o et d'indice k avec plus de précision, en tenant compte de ρ, on devra essayer de calculer, dans (13_1), T en fonction de x avec plus d'exactitude; on évaluera avec une approximation plus grande la racine m_2 de $\psi'_m = 0$ [(équation (12_1)]. Nous n'insistons pas. (Depuis que ces lignes ont été écrites, nous avons achevé cette classification : voir *Comptes rendus,* 1er février 1904, p. 262; 15 février 1904, p. 410; et *Journal de Mathématiques,* 1904.)

Enfin, nous remarquerons qu'il existe encore ici, comme pour les fonctions entières d'ordre infini, des fonctions intermédiaires entre les fonctions d'indice $k-1$ et celles d'indice k, à savoir celles pour lesquelles ρ est nul dans $\varphi(x)$ [(formule (2_1 *bis*)]. On peut encore étudier ces fonctions; on peut même considérer une suite de fonctions $\varphi(x)$ pour lesquelles

$$|a_m| = e_k(m)^{-\lambda \log_{\rho_1} m},$$

où λ est fini, positif, $\neq 0$, constant ou non, et ρ_1 un entier quelconque; et voir si l'on ne peut baser une classification des fonctions correspondantes d'ordre o sur la considération des diverses valeurs de k, λ et ρ_1 (y compris $\rho_1 = 0$). Ce sont là des sujets d'études intéressants, quoique nous n'en voyons pas d'application bien nette pour le moment; à moins qu'il n'y en ait dans la classification des nombres transcendants $\varphi(x)$ correspondant aux valeurs de $\varphi(x)$ pour x rationnel ou qui sont racines de $\varphi(x)$ lorsque les coefficients de $\varphi(x)$ sont rationnels.

On pourra aussi chercher à faire, soit pour les fonctions entières d'ordre infini non transfini, soit pour celles d'ordre o, une classification encore plus détaillée, en s'inspirant d'un Mémoire de M. E. Lindlöf (*Comptes rendus,* 30 décembre 1901, et Mémoire *Sur la théorie des fonctions entières de genre fini, Acta Societ. Scientiarum Fennicæ,* t. XXXI, n° 1, décembre 1901, Helsingfors).

Il y a encore lieu d'étudier la rapidité de croissance des modules des racines des fonctions entières d'ordre o par des procédés analogues à ceux employés pour les fonctions entières d'ordre non transfini et > 0 (Hadamard, Borel, Boutroux, etc.). Des procédés plus simples sont souvent applicables pour l'étude et la détermination de ces racines (*voir* nos Communications des *Comptes rendus,* avril et 9 décembre 1901, 3 mars 1902; une Note du *Journal de l'École Polytechnique,* 1903, *Sur les lignes de décroissance maxima des modules, etc.;* un Mémoire à l'impression dans les *Acta mathematica*).

essentiel isolé. En particulier, la remarque II (p. 29) du paragraphe IV s'étend aux fonctions entières d'ordre $(0, 1, \rho)$ grâce au théorème III de la page 39 du paragraphe V [1].

Remarque II. — On sait qu'il y a des fonctions dont le maximum du module pour $|x| \leqq r$ croît plus vite avec r que celui de toute fonction d'ordre non transfini, c'est-à-dire que $e_k(|x|^\rho)$, quels que soient les entiers k et ρ [2] : ce sont des fonctions *à croissance très rapide* [3]. Ce qui précède permet de définir aussi *les fonctions entières d'ordre* 0 *et d'indice infini,* dont le maximum du module est plus grand que le module de tout polynome donné pour $|x| = r$ assez grand, mais plus petit que le maximum du module pour $|x| = r$ de toute fonction entière

---

(1) En particulier, ces théorèmes s'étendent aux fonctions θ, θ_1, θ_2, θ_3 de Jacobi (*voir* par exemple Jordan, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*) qui sont des fonctions quasi-entières d'ordre 0 ayant un point singulier essentiel à l'origine et à l'infini.

Soit, par exemple,

$$\theta_3 = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} z^{2n}, \qquad q = \frac{1}{p}, \qquad \varphi_3(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{p^{n^2}};$$

$$\theta_3 = \varphi_3(z) + \varphi_3\left(\frac{1}{z}\right) + 1 : \varphi_3(z) = \sum_{2}^{\infty} \frac{z^\nu}{p^{\left(\frac{\nu}{2}\right)^2}} \qquad (\nu \text{ pair})$$

est de l'ordre de

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{z^\nu}{\varpi^{\frac{\nu^2}{4}}} = \sum_{2}^{\infty} \frac{z^\nu}{e^{\frac{\nu^2}{4}\log\varpi}}$$

si $\varpi = |p|$. $\varphi_3(z)$ est alors une fonction entière d'ordre $\left(0, 1, \frac{4}{\log\varpi}\right)$, d'après le lemme II. Aux environs des points critiques 0 et ∞, l'ordre de θ_3 est $\left(0, 1, \frac{4}{\log\varpi}\right)$. D'après le théorème III, la croissance de θ_3 y est régulière : la valeur maxima du module de $|\theta_3|$ pour $|z| = r$ a donc pour valeur asymptotique, quand $r = z$ est très grand,

$$r^{\frac{1}{4}\left(\frac{4}{\log\varpi} - \varepsilon\right)\log r} = r^{\left(\frac{1}{\log\varpi} - \frac{\varepsilon}{4}\right)\log r}.$$

Quand q est réel, c'est la valeur asymptotique de $\theta_3(r)$.

De même pour les autres fonctions θ, θ_1, θ_2.

(2) Borel, *Leçons sur les fonctions entières,* p. 92.

(3) *Ibid., Acta math.,* t. XX, p. 368.

d'indice fini. *Une pareille fonction est, par exemple,*

$$\sum_1^\infty \frac{x^m}{e_m(m)^m}.$$

Ces fonctions d'indice infini comprennent des fonctions quasi-algébriques.

VI.

ÉQUATIONS LINÉAIRES.

Nous savons [1] que, si une fonction monodrome aux environs d'un point critique x_0 et d'ordre fini dans le domaine de ce point satisfait à une équation différentielle linéaire homogène, dont les coefficients sont des polynomes, sa croissance est régulière aux environs de ce point. Il en sera de même pour une solution monodrome aux environs de x_0 et d'ordre non transfini ou $(0, 1, \rho)$: la démonstration est la même. Il en sera encore de même pour les intégrales de cette équation de la forme $(x-x_0)^s u_0$ (s fini, u_0 monodrome), à moins que u_0 ne soit d'ordre transfini [2] ou d'indice $\geqq 2$.

Il semble que l'on puisse plus généralement arriver à un résultat analogue pour toutes les intégrales des équations différentielles linéaires homogènes dont les coefficients sont des polynomes, dans un cas étendu.

On sait que l'on pourra trouver un système d'intégrales indépendantes de cette équation différentielle formé d'un certain nombre d'ensembles de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} y_0 = (x-x_0)^{r_1} u_0 = (x-x_0)^{r_1} z_0, \\ y_1 = (x-x_0)^{r_1}(\theta_1 u_0 + u_1) = (x-x_0)^{r_1} z_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_{k_1} = (x-x_0)^{r_1}(\theta_{k_1} u_0 + \theta_{k_1-1} u_1 + \dots + u_{k_1}) = (x-x_0)^{r_1} z_{k_1}, \end{array}\right.$$

---

[1] *Bull. Soc. math.*, 1903, p. 42.

[2] Encore resterait-il à examiner si cet ordre peut être transfini : nous verrons plus loin que cet ordre est forcément limité supérieurement.

où

$$\left\{\begin{array}{l}\theta_1 = \frac{1}{2\pi i}\log(x - x_0),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \theta_{k_1} = \frac{\theta_1(\theta_1 - 1)\dots(\theta_1 - k_1 + 1)}{k_1!}.\end{array}\right.$$

Nous admettons que x_0 est le seul point critique à distance finie qui ne soit pas un pôle et que les intégrales sont régulières au sens de Fuchs.

Nous savons ([1]) que la croissance de z_0 est régulière.

Substituons maintenant $y = (x - x_0)^{r_1} z$ dans l'équation différentielle : on obtient une nouvelle équation différentielle en z $F_1(z^{(n)}, \dots, z, x) = 0$ de la même forme, sur laquelle il suffit de raisonner, et dont $z_0, z_1, \dots, z_{k_1}$ sont solutions : $u_0, u_1, \dots, u_{k_1}$ sont des fonctions quasi-entières n'ayant à distance finie que des pôles.

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{dz_1}{dx} = \theta_1 \frac{du_0}{dx} + \frac{u_0}{2\pi i(x - x_0)} + \frac{du_1}{dx},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right.$$

Le coefficient de θ_1 dans l'équation différentielle sera précisément le premier membre de cette équation où l'on substitue u_0 à z; il sera nul, c'est-à-dire que l'on sera conduit à l'équation

$$F_1(u_1^{(n)}, \dots, u_1, x) = \varphi_1,$$

φ_1 étant une fonction quasi-entière n'ayant à distance finie que des pôles et d'ordre au plus égal à celui de u_0. La croissance de u_1 sera encore régulière ([2]) si son ordre est supérieur à celui de u_0. Que cet ordre soit supérieur ou inférieur à celui de u_0, la croissance de z_1 et y_1 sera régulière. Le seul cas douteux est celui où l'ordre de u_1 est le même que celui de u_0.

([1]) *Ann. Fac. Toul.*, 1902, p. 468.

([2]) Même raisonnement que pour u_0, *Ann. Fac. Toul.*, 1902, p. 457. On suppose les ordres de u_0, u_1, ... non transfinis ou l'indice $= 1$.

Dans ce cas,

$$U = \theta_1 u_0 + u_1 = \frac{1}{2\pi i}[\log(x - x_0) + 2p\pi i]u_0 + u_1.$$

Si, pour une valeur de p, $p = p_1$ par exemple, la croissance n'est pas régulière aux environs de $|x - x_0| = r$,

$$U - U_1 = (p - p_1)u_0 \qquad (p \neq p_1),$$

et U a sa croissance régulière aux environs de $|x - x_0| = r$.

De même, si l'on substitue z_2 dans l'équation différentielle en z, les coefficients de θ_1 et θ_2 sont nuls, parce que z_0 et z_1 sont des intégrales. Si u_2 est une fonction quasi-entière d'ordre supérieur à celui de u_1 et u_0, sa croissance est régulière; si elle est d'ordre inférieur à celui de $\theta_1 u_0 + u$, la croissance est de même nature que celle de $\theta_1 u_0 + u_1$; enfin, si elle n'est pas d'ordre inférieur, on a

$$\begin{aligned} U &= \theta_2 u_0 + \theta_1 u_1 + u_2 \\ &= \frac{u_0}{2}\left[\frac{1}{(2\pi i)^2}\{\log(x - x_0) + 2p\pi i\}^2 - \frac{1}{2\pi i}\{\log(x - x_0) + 2p\pi i\}\right] \\ &\quad + \frac{u_1}{2\pi i}[\log(x - x_0) + 2p\pi i] + u_2. \end{aligned}$$

Admettons que, pour deux valeurs de p, p_1 et p_2, la croissance ne soit pas régulière aux environs de la valeur r de $|x - x_0|$, et posons

$$\frac{\log(x - x_0)}{2\pi i} = \theta_1;$$

soient U_1, U_2 les deux valeurs correspondantes de U; on a

$$U_1 = u_2 + u_1(p_1 + \theta_1) + \frac{u_0}{2}[(p_1 + \theta_1)^2 - (p_1 + \theta_1)],$$

$$U_1 = u_2 + u_1(p_1 + \theta_1) + \frac{u_0}{2}[\theta_1^2 + \theta_1(2p_1 - 1) + p_1^2 - p_1]$$

et

$$\begin{cases} U - U_1 = (p - p_1)u_1 + \frac{u_0}{2}[2(p - p_1)\theta_1 + p^2 - p - p_1^2 + p_1], \\ U_2 - U_1 = (p_2 - p_1)u_1 + \frac{u_0}{2}[2(p_2 - p_1)\theta_1 + p_2^2 - p_2 - p_1^2 + p_1], \end{cases}$$

$$\frac{U - U_1}{p - p_1} - \frac{U_2 - U_1}{p_2 - p_1} = \frac{u_0}{2}[p + p_1 - 1 - (p_2 + p_1 - 1)] = \frac{u_0}{2}(p - p_2),$$

et il en résulte que la croissance de U est régulière pour $|x - x_0| = r$.

Par conséquent, la croissance des diverses valeurs de z_2 aux environs de $|x - x_0| = r$ est régulière, sauf peut-être pour deux au plus de ces valeurs.

On pourrait essayer de continuer de la sorte, mais nous croyons inutile d'insister pour le moment.

Soient

$$A_0 \frac{d^k y}{dx^k} + \ldots + A_k y + A_{k+1} = 0 \tag{21}$$

avec

$$A_i = a_0^{(i)} x^q + \ldots + a_q^{(i)} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, k+1), \tag{22}$$

un des $a_0^{(i)}$ étant $\neq 0$, ainsi qu'un des coefficients $a_0^{(0)}, \ldots, a_q^{(0)}$ et un des coefficients $a_q^{(0)} \ldots, a_q^{(k+1)}$, q ayant la même valeur pour tous les A_i.

Nous allons indiquer des applications des propriétés établies par nous, soit ici, soit dans une Note antérieure [1], à des équations de ce type.

THÉORÈME IV. — *L'équation différentielle*

$$\frac{d^k y}{dx^k} + A_1 \frac{d^{k-1} y}{dx^{k-1}} + \ldots + A_{k+1} = 0, \tag{21 bis}$$

---

[1] *Ann. Fac. Toul.*, 1903, p. 456 et suiv.

où $A_1, \ldots, A_{k+1}$ *sont des polynomes, a pour intégrale générale une fonction entière d'ordre fini* $\leqq q+k$ *ou un polynome. Quand les* $A_1, \ldots, A_k, A_{k+1}$ *ont leurs coefficients rationnels, l'équation différentielle possède* k *intégrales indépendantes qui sont d'ordre* $\geqq \frac{1}{k}$ *ou des polynomes.*

En effet, on sait, d'après un théorème de Fuchs, que l'intégrale est une fonction entière, puisque le coefficient de $\frac{d^k y}{dx^k}$ est égal à l'unité et que l'intégrale n'a, dès lors, pas de point critique à distance finie [1].

Ce n'est pas tout : on voit facilement et l'on sait que si [2]

$$y = \sum_0^\infty \alpha_n x^n$$

est une intégrale quelconque de (21), les coefficients α_n sont donnés par les formules

$$\begin{aligned}
&a_q^{(k)}\alpha_n + a_{q-1}^{(k)}\alpha_{n-1} + \ldots + a_0^{(k)}\alpha_{n-q} \\
&\quad + (n+1)a_q^{(k-1)}\alpha_{n+1} + \ldots + (n-q+1)a_0^{(k-1)}\alpha_{n-q+1} \\
&\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + (n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)a_q^{(0)}\alpha_{n+k} + \ldots \\
&\quad + (n+k-q)(n+k-q-1)\ldots(n-q+1)a_0^{(0)}\alpha_{n+k-q} = 0.
\end{aligned}$$

Ici, nous devons supposer n positif, $a_q^{(0)} = 1$, $a_{q-1}^{(0)} = \ldots = a_0^{(0)} = 0$. On a donc

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}
&-(n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)\alpha_{n+k} \\
&\quad = (n+k-1)\ldots(n+1)a_q^{(1)}\alpha_{n+k-1} + \ldots + a_0^{(k)}\alpha_{n-q},
\end{aligned}\right.$$

$$\alpha_{n+k} = \frac{1}{n+k}(B_{n+k-1}\alpha_{n+k-1} + \ldots + B_{n-q}\alpha_{n-q}),$$

où $B_{n+k-1}, \ldots, B_{n-q}$ sont limités.

---

(1) *Ann. Fac. Toul.*, 1903, p. 467.

(2) *Id.*, p. 456.

1° *Limite supérieure des* $|\alpha_{n+k}|$. — Soient α_{n+k-i} le plus grand des coefficients $\alpha_{n+k-1}, \ldots, \alpha_{n-q}$ $(1 \leqq i \leqq k+q)$, B la valeur absolue du plus grand des coefficients $B_{n+k-1}, \ldots, B_{n-q}$ en valeur absolue. On a

$$|\alpha_{n+k}| \leqq \frac{q+k}{n+k} B |\alpha_{n+k-i}|;$$

de même

$$|\alpha_{n+k-i}| \leqq \frac{q+k}{n+k-i} B_1 |\alpha_{n+k-i-i_1}| \qquad (1 \leqq i_1 \leqq k+q),$$

. . . .

En multipliant membre à membre ces inégalités et désignant par β une limite supérieure de $B, B_1, \ldots$, on a

$$|\alpha_{n+k}| \leqq \frac{[\beta(q+k)]^n}{(n+k)(n+k-i)(n+k-i-i_1)\ldots} C,$$

avec $i, i_1, \ldots \leqq q+k = \chi$, C étant une constante. On a

$$|\alpha_{n+k}| \leqq \frac{C(\beta\chi)^n}{(n+k)(n+k-\chi)(n+k-2\chi)\ldots\left[n+k-\chi E\left(\frac{n+k}{\chi}\right)\right]},$$

$n+k-\chi E\left(\frac{n+k}{\chi}\right)$ devant être remplacé par 1 si $n+k$ est divisible par χ. On en tire

$$|\alpha_{n+k}| \leqq \frac{C_1 \beta^n \chi^n}{\frac{n+k}{\chi}\left(\frac{n+k}{\chi}-1\right)\ldots\left[\frac{n+k}{\chi}-E\left(\frac{n+k}{\chi}\right)\right]} \qquad (C_1 \text{ const.}).$$

Soit N un entier, et prenons dans y les χ termes consécutifs

$$\alpha_{N\chi-k} x^{N\chi-k} + \ldots + \alpha_{N\chi+\chi-1-k} x^{N\chi+\chi-1-k}.$$

Chacun a son module au plus égal à

$$\frac{C_1(\beta\chi|x|)^{N\chi+\chi-1}}{N!}$$

(on peut toujours prendre $\beta > 1$ et $|x| = r$ grand), car

$$\begin{aligned} &\frac{N\chi+j}{\chi}\left(\frac{N\chi+j}{\chi}-1\right)\cdots\left[\frac{N\chi+j}{\chi}-E\left(\frac{N\chi+j}{\chi}\right)\right] \\ &\quad \geqq \left(N+\frac{j}{\chi}\right)\left(N-1+\frac{j}{\chi}\right)\cdots\frac{1}{\chi} \geqq \frac{1}{\chi}N! \qquad (j = 0, 1, \ldots, \chi-1) \end{aligned}$$

puisque $E\left(\frac{N\chi+j}{\chi}\right) = N$. La série y a son module au plus égal à

$$\sum \frac{C_1\chi(\beta\chi|x|)^{N\chi+\chi-1}}{N!} \leqq \sum \frac{C_1\chi(\beta\chi|x|)^{N\chi N}}{N!}.$$

Le terme général a_m de cette série, si $m = N\chi$, est tel que

$$|a_m^{-1}| = (C_1\chi)^{-1}\frac{\left(\frac{m}{e\chi}\right)^{\frac{m}{\chi}+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi e}}{[(\beta\chi)^\chi]^{\frac{m}{\chi}}\frac{m}{\chi}}(1+\varepsilon) = m^{m\left(\frac{1}{\chi}+\varepsilon_1\right)},$$

ε_1 tendant vers o quand m croît indéfiniment. C'est donc une fonction entière d'ordre χ, et l'ordre de $y = \sum \alpha_n x^n$ est $\leqq \chi = q + k$.

2° *Limite inférieure des α_{n+k}.* — Parmi les équations (21) ou (21 *bis*) il y en a toujours une infinité ayant pour solution particulière un polynome. Pour en avoir des exemples, il suffit de prendre $A_0, \ldots, A_k$ quelconques, pour y un polynome quelconque, et de substituer y dans (21), en déterminant A_{k+1} de manière que (21) ait lieu.

Parmi ces équations il y en a aussi ayant pour solution une fonction entière d'ordre fini > 0 rationnel quelconque ($\leqq k + q$), comme nous le

verrons tout à l'heure sur un exemple. Mais nous savons que, entre les polynomes et les fonctions entières d'ordre fini > 0, il existe une catégorie de fonctions entières aussi étendue que celle des fonctions entières d'ordre infini ou transfini, les fonctions entières d'ordre o comprenant celles que nous avons appelées *les fonctions quasi-algébriques*.

On peut, dès lors, se demander si les équations (21) ou (21 *bis*) peuvent admettre comme solutions des fonctions entières d'ordre o, ce qui pourrait accroître l'importance de ces fonctions.

Les résultats déjà acquis par nous antérieurement pour des catégories étendues d'équations différentielles rationnelles [1] laisseraient plutôt supposer le contraire. Nous nous contenterons d'établir ici le résultat suivant :

Les équations différentielles linéaires homogènes (21 *bis*), *dont les coefficients sont des polynomes à coefficients rationnels, ont k intégrales indépendantes qui sont des fonctions entières d'ordre* $\geqq \frac{1}{k}$ *ou des polynomes. On a une propriété analogue pour les équations* (21 *bis*) *à second membre.*

Supposons les coefficients $a_j^{(i)}$ rationnels.

On a

$$\alpha_{n+k} = \frac{1}{(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)} \frac{1}{\Delta}\left(b_{n+k-1}^{(n+k)} \alpha_{n+k-1} + \dots + b_{n-q}^{(n+k)} \alpha_{n-q}\right)$$

où $b_{n+k-1}^{(n+k)}, \dots, b_{n-q}^{(n+k)}$ sont entiers, Δ étant le dénominateur commun des $a_i^{(j)}$; admettons que y ne soit pas un polynome : les coefficients $b_{n+k-1}^{(n+k)}, \dots, b_{n-q}^{(n+k)}$ ne sont pas tous nuls et la valeur absolue de l'un d'eux est $\geqq 1$.

La formule ci-dessus, qui donne α_{n+k}, est d'ailleurs applicable dès que $n \geqq \nu_1$, ν_1 étant fini, puisque le degré de A_{k+1} est limité.

---

[1] *J. de Math.*, 1903, p. 19.

En particulier, si y est l'intégrale générale de (21), pour une certaine valeur finie $\nu \geqq \nu_1$,

$$\alpha_{\nu+k} = \frac{1}{\Delta(\nu+k)\ldots(\nu+1)}\left(b_{\nu+k-1}^{(\nu+k)}\alpha_{\nu+k-1} + \ldots + b_{\nu-q}^{(\nu+k)}\alpha_{\nu-q}\right),$$

où les $\alpha_{\nu+k-1}, \ldots, \alpha_{\nu-q}$ dépendent linéairement de k constantes arbitraires $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$, d'après les formules

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{\nu+k-1} = c_1^{(\nu+k-1)}\gamma_1 + \ldots + c_k^{(\nu+k-1)}\gamma_k + c_{k+1}^{(\nu+k-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{\nu-q} = c_1^{(\nu-q)}\gamma_1 + \ldots + c_k^{(\nu-q)}\gamma_k + c_{k+1}^{(\nu-q)}, \end{array}\right.$$

où les $c_i^{(j)}$ sont rationnels, à numérateurs et dénominateurs limités (les c_{k+1} étant nuls si $A_{k+1} = 0$) [1]. On pourra donc écrire

$$\left\{\begin{array}{l} \delta\alpha_{\nu+k-1} = d_1^{(\nu+k-1)}\gamma_1 + \ldots + d_k^{(\nu+k-1)}\gamma_k + d_{k+1}^{(\nu+k-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \delta\alpha_{\nu-q} = d_1^{(\nu-q)}\gamma_1 + \ldots + d_k^{(\nu-q)}\gamma_k + d_{k+1}^{(\nu+k-1)}, \end{array}\right.$$

δ étant le plus petit dénominateur commun des $c_i^{(j)}$, qui est un nombre déterminé fixe, et les $d_i^{(j)}$ des entiers limités. On en conclura

$$\alpha_{\nu+k}\Delta(\nu+k)\ldots(\nu+1) = f_1^{(\nu+k)}\gamma_1 + \ldots + f_k^{(\nu+k)}\gamma_k + f_{k+1}^{(\nu+k)},$$

où $f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}$ sont des entiers, le dernier nul si $A_{k+1} = 0$.

De même

$$\alpha_{\nu+k+1}\Delta(\nu+k+1)\ldots(\nu+2) = b_{\nu+k}^{(\nu+k+1)}\alpha_{\nu+k} + \ldots + b_{\nu-q+1}^{(\nu+k+1)}\alpha_{\nu-q+1},$$

$$\alpha_{\nu+k+1}\delta\Delta^2(\nu+k+1)\ldots(\nu+2)(\nu+k)\ldots(\nu+1)$$
$$= f_1^{(\nu+k+1)}\gamma_1 + \ldots + f_k^{(\nu+k+1)}\gamma_k + f_{k+1}^{(\nu+k+1)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

---

(1) Les $c_i^{(j)}$ sont des fonctions linéaires à coefficients rationnels des $a_{i_1}^{(j_1)}$ et sont rationnels, puisque ces derniers le sont.

$$\alpha_{n+\nu+k}(n+\nu+k)\ldots(n+\nu+1)(n+\nu+k-1)\ldots(n+\nu)\ldots$$
$$\times(\nu+k+1)\ldots(\nu+2)(\nu+k)\ldots(\nu+1)\delta\Delta^{n+1}$$
$$=\alpha_{n+\nu+k}\frac{(n+\nu+k)!(n+\nu+k-1)!\ldots(n+\nu+1)!}{(\nu+k-1)!(\nu+k-2)!\ldots\nu!}\delta\Delta^{n+1}$$
$$=f_1^{(n+\nu+k)}\gamma_1+\ldots+f_k^{(n+\nu+k)}\gamma_k+f_{k+1}^{(n+\nu+k)}.$$

Admettant l'exactitude de cette formule pour $n+\nu+k$, on a

$$\alpha_{n+\nu+k+1}\Delta(n+\nu+k+1)\ldots(n+\nu+2)$$
$$=b_{n+\nu+k}^{(n+\nu+k+1)}\alpha_{n+\nu+k}+\ldots+b_{n+\nu-q+1}^{(n+\nu+k+1)}\alpha_{n+\nu-q+1},$$

$$\alpha_{n+\nu+k+1}\frac{(n+\nu+k+1)!\ldots(n+\nu+2)!}{(\nu+k-1)!\ldots\nu!}\delta\Delta^{n+2}$$
$$=f_1^{(n+\nu+k+1)}\gamma_1+\ldots+f_k^{(n+\nu+k+1)}\gamma_k+f_{k+1}^{(n+\nu+k+1)}$$

où les $f_i^{(j)}$ sont entiers, ce qui montre bien l'exactitude de cette formule (les f_{k+1} sont nuls quand $A_{k+1}=0$). Si les $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ sont rationnels et ont un plus petit dénominateur commun D et si $|\alpha_{n+\nu+k}|\neq 0$,

$$|\alpha_{n+\nu+k}|\geqq\frac{1}{\delta D\,\Delta^{n+1}(n+\nu+k)!\ldots(n+\nu+1)!}.$$

La fonction y est alors d'ordre $\geqq\frac{1}{k}$.

Soient $y_1, \ldots, y_k$ les intégrales correspondant à une valeur arbitraire rationnelle donnée de $\gamma_1, \ldots,$ ou γ_k, les autres valeurs γ_i correspondantes étant nulles : y_j, par exemple, correspondra à γ_j rationnel >0, $\gamma_1=\ldots=\gamma_{j-1}=\gamma_{j+1}=\ldots=\gamma_k=0$.

1° $A_{k+1}=0$. — Ici $C_1\gamma_1 y_1=\gamma'_1 y_1$ est aussi une intégrale (C_1 quelconque), c'est-à-dire que y_1 correspond aussi bien à une valeur irrationnelle de γ_1 : $Y=\gamma'_1 y_1+\ldots+\gamma'_k y_k$ est l'intégrale générale, et il y a k intégrales indépendantes qui sont d'ordre $\geqq\frac{1}{k}$ ou des polynomes. Quand on

donne dans Y aux γ' des valeurs telles que les rapports $\frac{\gamma'_2}{\gamma'_1}, \ldots, \frac{\gamma'_k}{\gamma'_1}$ soient rationnels, Y est toujours d'ordre $\geqq \frac{1}{k}$ ou est un polynome.

Il résulte seulement de là qu'il ne peut y avoir k intégrales indépendantes d'ordre $< \frac{1}{k}$ si l'intégrale générale n'est pas un polynome. Peut-il y en avoir une d'ordre $< \frac{1}{k}$ et qui ne soit pas un polynome ? Ce serait là une question intéressante dont nous n'avons pas la solution.

Plus généralement en est-il de même quand les $a_i^{(j)}$ sont quelconques, par exemple irrationnels ? C'est ce que nous ignorons.

2° $A_{k+1} \neq 0$. — Nous prenons les intégrales correspondant à γ_i rationnel $\neq 0$, les autres γ étant nuls, et celle correspondant à $\gamma_1 = \ldots = \gamma_k = 0$ que nous désignerons par y_{k+1}.

Substituons y dans (21 *bis*) : le terme indépendant de x dans le premier membre est

$$\alpha_k k! + a_q^{(1)} \alpha_{k-1} (k-1)! + \ldots + a_q^{(k)} \alpha_0 + a_q^{(k+1)} = 0,$$

et l'on peut prendre pour les constantes arbitraires dans l'intégrale générale $\alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_0$. C'est ce que nous avons supposé.

Soit $y_i (i \leqq k)$ l'intégrale correspondant à $\gamma_i \neq 0$; on a

$$y_i = \gamma_i z_i + y_{k+1} \quad (^1).$$

---

(1) Soient $\theta_1 = \sum \beta_n z^n$, $\theta_2 = \sum \gamma_n z^n$ deux fonctions entières d'ordre fini à coefficients rationnels avec $\beta_n = \frac{\beta'_n}{\beta''_n}$, β'_n, β''_n entiers premiers entre eux, $\gamma_n = \frac{\gamma'_n}{\gamma''_n}$, γ'_n, γ''_n premiers entre eux, les $\sum \frac{z^n}{\beta''_n}$, $\sum \frac{z^n}{\gamma''_n}$ étant d'ordre $\geqq \rho_1$ et ρ_2 respectivement. On a, μ_1 et μ_2 étant rationnels,

$$\mu_1 \theta_1 + \mu_2 \theta_2 = \sum \frac{\mu_1 \beta'_n \gamma''_n + \mu_2 \beta''_n \gamma'_n}{\beta''_n \gamma''_n} z^n = \sum \frac{\delta'_n}{\delta''_n} z^n = \sum \delta_n z^n$$

(δ'_n, δ''_n entiers premiers entre eux) : si $\mu_1 \theta_1 + \mu_2 \theta_2$ ne se réduit pas à un polynome, il est

Je dis que les z_i sont linéairement indépendants. Sinon, soit

$$z_i = h_1 z_1 + \ldots + h_{i-1} z_{i-1} \qquad (i \leqq k),$$

les $z_1, \ldots, z_{i-1}$ étant linéairement indépendants. On a

$$\frac{y_i - y_{k+1}}{\gamma_i} = \frac{h_1}{\gamma_1}(y_1 - y_{k+1}) + \ldots + \frac{h_{i-1}}{\gamma_{i-1}}(y_{i-1} - y_{k+1}),$$

$$\frac{y_i}{\gamma_i} = \frac{h_1}{\gamma_1} y_1 + \ldots + \frac{h_{i-1}}{\gamma_{i-1}} y_{i-1} - y_{k+1}\left(\frac{h_1}{\gamma_1} + \ldots + \frac{h_{i-1}}{\gamma_{i-1}} + \frac{1}{\gamma_i}\right).$$

Or nous prenons $\alpha_{k-1} = \gamma_k, \ldots, \alpha_0 = \gamma_1$. Pour $x = 0$,

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = \alpha_0 + \alpha_k^{(0)} x^k + \alpha_{k+1}^{(0)} x^{k+1} + \ldots = \alpha_0 + F_1(x), \\ y_2 = \alpha_1 x + F_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_k = \alpha_{k-1} x^{k-1} + F_k(x), \\ y_{k+1} = F_{k+1}(x), \end{array}\right.$$

$F_1, F_2, \ldots, F_{k+1}$ ne contenant aucun terme de degré $< k$. On a ainsi la relation

$$\frac{\alpha_{i-1}}{\gamma_i} x^{i-1} = \frac{h_1}{\gamma_1}\alpha_0 + \ldots + \frac{h_{i-1}}{\gamma_{i-1}}\alpha_{i-2} x^{i-2} + F_{k+2}(x),$$

F_{k+2} ne contenant pas de terme de degré $< k$, ce qui est absurde.

L'équation différentielle possède encore k intégrales de la forme

$$y_i = \gamma_i z_i + y_{k+1}$$

---

d'ordre $\geqq \rho_3$ avec $\frac{1}{\rho_3} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$. On peut réduire cette limite inférieure quand β''_n et γ''_n ont un plus grand diviseur commun qui augmente indéfiniment avec n. Ainsi, quand $\beta''_n = \gamma''_n$, ou β''_n divisible par γ''_n, $\mu_1 \theta_1 + \mu_2 \theta_2$ a son ordre au moins égal au plus petit des deux ordres ρ_1 et ρ_2 s'il ne se réduit pas à un polynome. En vertu de cette remarque et des formules antérieures, z_i est un polynome ou une fonction entière d'ordre $\geqq \frac{1}{k}$.

(y_{k+1} intégrale particulière, γ_i constante rationnelle, z_i intégrale de l'équation différentielle sans second membre) qui sont des polynomes ou des fonctions entières d'ordre $\overline{\underline{>}} \frac{1}{k}$; les z_i sont aussi k intégrales indépendantes de l'équation sans second membre, qui sont des polynomes ou des fonctions entières d'ordre $\overline{\underline{>}} \frac{1}{k}$. Dès lors, les y_i sont k intégrales indépendantes de (21 *bis*). C. Q. F. D.

Il n'est pas difficile de vérifier que l'ordre de la solution de (21) peut être absolument quelconque. Nous considérerons seulement à cet égard l'équation

$$\frac{d^k y}{dx^k} - \varpi x^q y = 0,$$

et nous établirons le résultat suivant :

Théorème V. — *L'ordre d'une fonction entière satisfaisant à l'équation différentielle linéaire*

$$\frac{d^k y}{dx^k} - \varpi x^q y = 0$$

(ϖ *const.*, q *entier positif ou négatif,* $k + q > 0$) *peut être un nombre fini et rationnel quelconque, à savoir le nombre* $1 + \frac{q}{k}$.

1° $q > 0$.

Soit l'équation $\frac{d^k y}{dx^k} - \varpi x^q y = 0$ (1).

---

(1) Comp. Rouché et Lévy, *Anal.*, t. II, p. 606. L'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} - \varpi x^q y = 0$ équivaut à $\frac{du}{dx} + bu^2 = cx^q$, équation de Riccati, par la transformation $u = \frac{1}{by}\frac{dy}{dx}$; y dépend, en général, de deux constantes arbitraires et est ici d'ordre $1 + \frac{q}{2}$. Il en est de même de sa dérivée. y a d'ailleurs en général (et même toujours si q impair) une infinité de racines

Ici $a_0^{(k)} = -\varpi$, $a_q^{(0)} = 1$, tous les autres coefficients étant nuls. On a, d'après (23),

$$(n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)\alpha_{n+k} = \varpi\alpha_{n-q},$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha_m & = \dfrac{\varpi\alpha_{m-k-q}}{m(m-1)\ldots(m-k+1)}, \\ \alpha_{m-k-q} & = \dfrac{\varpi\alpha_{m-2k-2q}}{(m-k-q)(m-k-q-1)\ldots(m-2k-q+1)}, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Considérons le produit

$$\begin{aligned} \mathrm{P}^k = m(m-1)\ldots(m-k+1)(m-k-q) \\ \times(m-k-q-1)\ldots(m-2k-q+1)\ldots. \end{aligned}$$

Il est compris entre

$$m^k(m-k-q)^k(m-2k-2q)^k\ldots,$$

et

$$(m-k)^k(m-k-q)^k(m-2k-2q)^k\ldots.$$

Soit encore

$$\mathrm{E}\left(\frac{m}{k+q}\right) = \mu - 1.$$

On a

$$(k+q)^\mu . \mu! \geqq \mathrm{P} \geqq (\mu-2)!\,(k+q)^{\mu-2},$$

car

$$m - k \geqq m-(k+q) = (k+q)\left(\frac{m}{k+q} - 1\right) \geqq (k+q)(\mu-2).$$

---

ainsi que $\dfrac{dy}{dx}$ d'après les théorèmes de MM. Picard et Borel : par suite, l'intégrale de l'équation de Riccatti $\dfrac{du}{dx} + bu^2 = cx^q$ est une fonction méromorphe d'ordre $1 + \dfrac{q}{2}$ (au numérateur et au dénominateur).

Donc [1]

$$(k+q)^{\mu}\cdot\left(\frac{\mu}{e}\right)^{\mu+\frac{1}{2}}\cdot 2\sqrt{2\pi e} \geqq P \geqq \frac{(k+q)^{\mu}\left(\frac{\mu}{e}\right)^{\mu+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi e}}{(k+q)^{2}\mu(\mu-1)}.$$

Les deux termes extrêmes de cette inégalité sont de la forme $\mu^{\mu(1+\varepsilon)}$; il en est de même de P : $P^k = \mu^{k\mu(1+\varepsilon)}$.

Dès lors, le coefficient α_m est de la forme

$$\alpha_m = \frac{\beta_m \varpi^{\mu}}{\mu^{k\mu(1+\varepsilon)}}, \qquad (\beta_m \text{ const.});$$

$$\left(\frac{m}{k+q}\right)^{\frac{m}{k+q}(1+\varepsilon)} \leqq \mu^{\mu(1+\varepsilon)} \leqq \left(\frac{m}{k+q}+1\right)^{\left(\frac{m}{k+q}+1\right)(1+\varepsilon)},$$

$$\left(\frac{m}{k+q}\right)^{\frac{m}{k+q}(1+\varepsilon)} = m^{\frac{m}{k+q}(1+\varepsilon')},$$

$$\left(\frac{m}{k+q}\right)^{\left(\frac{m}{k+q}+1\right)(1+\varepsilon)}\left(1+\frac{k+q}{m}\right)^{\left(\frac{m}{k+q}+1\right)(1+\varepsilon)} = m^{\left(\frac{m}{k+q}\right)(1+\varepsilon'')}.$$

Donc

$$\alpha_m = m^{-\frac{km}{k+q}(1+\varepsilon'')},$$

et la solution est d'ordre $\frac{k+q}{k}$; en choisissant $k+q$ et k arbitrairement, on obtient pour ordres tous les nombres rationnels > 1.

2° $q < 0$.

En changeant q en $-q$, on obtient l'équation [2]

$$x^{q}\frac{d^{k}y}{dx^{k}} - \varpi y = 0,$$

(1) JORDAN, *Anal.*, t. II, 1883, p. 186.
(2) JORDAN, *Anal.*, t. III, 1887, p. 240.

qui comprend comme cas particulier une équation indiquée par M. Jean Resal [1].

Ici $a_q^{(k)} = -\varpi$, $a_0^{(0)} = 1$, les autres coefficients étant nuls. On a, d'après la page 52,

$$\varpi\alpha_n = (n+k-q)\ldots(n-q+1)\,\alpha_{n+k-q}.$$

Nous supposerons $k > q$: si $n+k-q = m$,

$$\varpi\alpha_{m-k+q} = m(m-1)\ldots(m-k+1)\,\alpha_m.$$

C'est une formule précédemment obtenue, à condition de changer q en $-q$. Les calculs restent dès lors les mêmes sous cette réserve, et l'on en conclut

$$a_m = m^{-\frac{km}{k-q}(1+\varepsilon'')}.$$

La solution est d'ordre $\frac{k-q}{k}$ $(k-q>0)$.

On obtient ici tous les ordres rationnels < 1. C. Q. F. D.

VII.

ÉQUATIONS NON LINÉAIRES.

Les résultats obtenus par nous [2] en ce qui concerne les fonctions

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_0^\infty \theta_n x^n \quad et \quad \mathrm{P}(x) + \sum_0^\infty \frac{\theta_n}{x^n}, \text{ où } \mathrm{P}(z) \text{ est un polynome et } \sum_0^\infty \theta_n z^n$$

une fonction entière d'ordre fini, s'étendent au cas où cette fonction est d'ordre infini, mais non transfini :

---

(1) Rouché et Lévy, *Anal.*, t. II, p. 630.

(2) *Comptes rendus*, 2e sem., 1902, p. 391, et *Ann. de la Fac. de Toul.*, 1902, p. 458.

Théorème VI. — *Une telle fonction ne peut être solution d'une équation différentielle rationnelle.*

$$E = \sum A y^{i_0} y'^{i_1} \dots y^{(k) i_k} = 0$$

(A *polynome en* x) *ne renfermant qu'un seul terme en* y, y', …, *ou* $y^{(k)}$ *que si elle est à croissance régulière.*

Les raisonnements restent les mêmes; les calculs sont seuls parfois modifiés ainsi qu'il suit (nous conservons les mêmes notations et indiquons les équations à modifier par le même numéro affecté de l'indice 2).

Supposons que $\sum_0^\infty \theta_m z^m$ soit à croissance irrégulière, $P\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_0^\infty \theta_n x^n$ étant une solution. On a, pour une infinité de valeurs de m,

$$(28_2) \qquad \theta_m = (\log_k m)^{-\frac{m}{\rho}(1+\varepsilon)}.$$

Pour les autres valeurs de m

$$(29_2) \qquad \theta_m = (\log_k m)^{-\frac{m}{\sigma}},$$

$\rho - \sigma$ fini, positif et limité inférieurement : si [1] m_1 et m_2 ($m_2 > m_1$) sont deux nombres m consécutifs pour lesquels (28_2) a lieu, on a une infinité de valeurs de m_1 telles que

$$(30_2) \qquad m_2 \geqq m_1 (\log_{k+1} m_1)^{\frac{1}{2}},$$

d'après le théorème I du paragraphe III.

On a

$$(32_2) \qquad \theta_{\pm\beta_1} = \frac{k_1}{(\log_k \beta_1)^{\frac{\beta_1}{\sigma_1}}},$$

où k_1 est limité quel que soit β_1. Dans cette formule, nous supposons que $\log_k \beta_1$ soit remplacé par 1 dès que $\log_k \beta_1 \leqq 1$, $\log_{k-1} \beta_1 \leqq e$, …,

[1] Les modifications pour les fonctions d'ordre (k, o) sont évidentes.

$\beta_1 \overset{<}{=} e_k(1)$.

$$(33_2) \qquad (\theta_\alpha^{m!}\ldots\theta_{\alpha_k}^{m!}\ldots)^{-1} = k_2(\log_k\beta_1)^{\frac{\beta_1}{\sigma_1}}\ldots(\log_k\beta_l)^{\frac{\beta_l}{\sigma_l}}.$$

Il y a une des valeurs β_i, β_l par exemple, telle que

$$(34_2) \qquad \beta_l \overset{>}{=} \frac{n+r_1}{l},$$

$\sigma_l \overset{<}{=} \rho - \zeta$ (ζ fini, positif et limité), car

$$\beta_l(\log_{k+1}\beta_l)^{\frac{1}{2}} \overset{>}{=} \frac{n+r_1}{l}\left(\log_{k+1}\frac{n+r_1}{l}\right)^{\frac{1}{2}} > n + r_2,$$

pour n assez grand. On pourra donc poser

$$(35_2) \qquad \sigma_l \overset{<}{=} \sigma' = \rho - \zeta.$$

β_l étant supposé fixe, cherchons un minimum de

$$(\log_k\beta_1)^{\frac{\beta_1}{\sigma_1}}\ldots(\log_k\beta_{l-1})^{\frac{\beta_{l-1}}{\sigma_{l-1}}} \overset{>}{=} [(\log_k\beta_1)^{\beta_1}\ldots(\log_k\beta_{l-1})^{\beta_l}]^{\frac{1}{\rho_1}},$$

avec

$$\beta_1 + \ldots + \beta_{l-1} = \text{const.} = n + r_1 - \beta_l, \qquad \rho_1 = \rho + \varepsilon,$$

$|\varepsilon|$ aussi petit qu'on veut, mais fini.

Soient $\beta_\lambda, \ldots, \beta_{l-1}$ ceux des $\beta_1, \ldots, \beta_{l-1}$ qui sont $< e_k(1)$: il nous suffit d'avoir un minimum de

$$\frac{\beta_1}{\sigma_1}\log_{k+1}\beta_1 + \ldots + \frac{\beta_{\lambda-1}}{\sigma_{\lambda-1}}\log_{k+1}\beta_{\lambda-1} \overset{>}{=} \frac{\beta_1\log_{k+1}\beta_1 + \ldots + \beta_{\lambda-1}\log_{k+1}\beta_{\lambda-1}}{\rho_1};$$

avec

$$n + r'_1 - \beta_l = \beta_1 + \ldots + \beta_{\lambda-1} \qquad (r'_1 \text{ fini } \overset{<}{=} r_1\,;\ \text{si } \lambda = l,\ r'_1 = r_1).$$

On a

$$\log_{k+1}\beta_l \overset{>}{=} 0,$$

$$d(\beta_1\log_{k+1}\beta_1 + \ldots + \beta_{\lambda-1}\log_{k+1}\beta_{\lambda-1}) = 0,$$

et

$$d\beta_1 + \ldots + d\beta_{\lambda-1} = 0,$$

$$\sum_1^{\lambda-1} \left(\log_{k+1} \beta_i + \frac{1}{\log_k \beta_i \ldots \log \beta_i} \right) d\beta_i = 0,$$

$$0 = \sum d\beta_i \left(\log_{k+1} \beta_i - \log_{k+1} \beta_{\lambda-1} + \frac{1}{\log_k \beta_i \ldots \log \beta_i} - \frac{1}{\log_k \beta_{\lambda-1} \ldots \log \beta_{\lambda-1}} \right),$$

d'où

$$\log_{k+1} \beta_i + \frac{1}{\log_k \beta_i \ldots \log \beta_i} = \log_{k+1} \beta_{\lambda-1} + \frac{1}{\log_k \beta_{\lambda-1} \ldots \log \beta_{\lambda-1}}.$$

Considérons

$$X = \log_{k+1} x + \frac{1}{\log_k x \ldots \log x};$$

on a (p. 6)

$$X' = \left[1 - \frac{1}{\log x} - \ldots - \frac{1}{\log x \ldots \log_k x} \right] \frac{1}{x \log x \ldots \log_k x}.$$

Dès que $\log_k x \geqq 1$, $\log x \geqq k$ (¹), et cette dérivée est positive : X est constamment croissant. Donc dès que $\beta_i \geqq e_k(1)$, $\beta_{\lambda-1} \geqq e_k(1)$, ce que l'on suppose ici, on ne peut avoir

$$\log_{k+1} \beta_i + \frac{1}{\log_k \beta_i \ldots \log \beta_i} = \log_{k+1} \beta_{\lambda-1} + \frac{1}{\log_k \beta_{\lambda-1} \ldots \log_k \beta_{\lambda-1}}$$

que si $\beta_i = \beta_{\lambda-1}$; d'où $\beta_i = \beta_{\lambda-1} = \dfrac{n + r'_1 - \beta_l}{\lambda - 1}$ $(r'_1 \leqq r_1)$.

Soient

$$C = (\log_k \beta_1)^{\beta_1} \ldots (\log_k \beta_{\lambda-1})^{\beta_{\lambda-1}},$$

$$C_1 = \left[\log_k \frac{n + r'_1 - \beta_l}{\lambda - 1} \right]^{n + r'_1 - \beta_l}.$$

λ étant donné, C_1 est un minimum (et non un maximum) de C, car

---

(¹) En effet,

$\log x \geqq e_{k-1}(1)$, $e_0(1) = 1 \geqq 1$, $e_1(1) \geqq 2$, $e_2(1) \geqq e^{e_1(1)} \geqq e^2 \geqq 3$, ..., et $\log x \geqq e_{k-1}(1) \geqq k$.

prenant

$$\log_{k+1}\beta_{\lambda-1} = \ldots = \log_{k+1}\beta_2 = 1, \qquad \beta_2 = \ldots = \beta_{\lambda-1} = \gamma,$$

C devient

$$[\log_k(n + r''_1 - \beta_l)]^{n+r''_1-\beta_l},$$

qui est au moins égal à C_1 pour $\lambda \geqq 2$, car $r''_1 \leqq r'_1$. Enfin la valeur de C_1 est d'autant plus petite que λ est plus grand. Finalement

$$(\log_k\beta_1)^{\frac{\beta_1}{\sigma_1}} \ldots (\log_k\beta_l)^{\frac{\beta_l}{\sigma_l}} \geqq \left(\log_k \frac{n + r'_1 - \beta_l}{l - 1}\right)^{\frac{n + r'_1 - \beta_l}{\rho_1}} (\log_k\beta_l)^{\frac{\beta_l}{\sigma'}} k_3 = \mathrm{H}$$

$$(k_3 \text{ const.}).$$

Nous allons encore chercher une limite inférieure de H en tenant compte de (34_2). On a

$$\mathrm{X}_1 = \log \mathrm{H} = \frac{\beta_l}{\sigma'} \log_{k+1}\beta_l + \frac{n + r'_1 - \beta_l}{\rho_1} \log_{k+1} \frac{n + r'_1 - \beta_l}{l - 1} + \text{const.},$$

$$\mathrm{X}'_1 = \frac{1}{\sigma'}\left(\log_{k+1}\beta_l + \frac{1}{\log_k\beta_l \ldots \log\beta_l}\right)$$

$$- \frac{1}{\rho_1}\left[\log_{k+1}\frac{n + r'_1 - \beta_l}{l - 1} + \frac{1}{\log_k \frac{n + r'_1 - \beta_l}{l - 1} \ldots \log \frac{n + r'_1 - \beta_l}{l - 1}}\right],$$

avec $r_1 \geqq r'_1$, X'_1 étant la dérivée de X_1 par rapport à β_l.

Or nous avons vu que la fonction

$$\mathrm{X} = \log_{k+1} x + \frac{1}{\log_k x \ldots \log x}$$

croît toujours dès que $x \geqq e_k(1)$. Ici, d'après (34_2),

$$\beta_l \geqq \frac{n + r_1}{l} \geqq e_k(1), \qquad \sigma' < \rho_1,$$

et X_1 sera positif si l'on a

$$\rho_l \geq \frac{n-r_1-\rho_l}{l-1} \geq \frac{n-r_1-\rho_l}{l-1}, \qquad \rho_l \frac{l}{l-1} \geq \frac{n+r_1}{l-1}, \qquad \rho_l \geq \frac{n-r_1}{l},$$

ce qui a lieu. On aura alors une limite inférieure de X_1 ou H en faisant $\rho = \frac{n-r_1}{l}$:

$$H \geq \left(\log_i \frac{n-r_1}{l}\right)^{\frac{1}{2}\frac{n-r_1}{l}} \left[\log_i\left(\frac{n+r_1}{l} - \frac{r_2-r_1}{l-1}\right)\right]^{\frac{n-r_1}{l}\frac{l-1}{2} - \frac{r_2-r_1}{2}},$$

car

$$\frac{n-r_2-\frac{n-r_1}{l}}{l-1} = \frac{1}{l-1}\left[(n-r_1)\left(1-\frac{1}{l}\right)-r_2-r_1\right] = \frac{n-r_1}{l} - \frac{r_2-r_1}{l-1}.$$

Or nous savons (p. 18) que

$$\log_i(x-h) = \log_i x - \frac{h(1-\varepsilon)}{\log_{i-1} x \ldots x},$$

ε tendant vers zéro quand x croît indéfiniment. Dès lors

$$\log_i\left(\frac{n-r_1}{l} - \frac{r_2-r_1}{l-1}\right) = \log_i \frac{n-r_1}{l} - \frac{r_2-r_1}{l-1}\,\frac{1-\varepsilon}{\log_{i-1}\frac{n-r_1}{l}\cdots\frac{n-r_1}{l}}$$
$$\geq \tfrac{1}{2}\log_i \frac{n-r_1}{l}.$$

Finalement

$$H \geq \left(\log_i \frac{n-r_1}{l}\right)^{[illegible]}.$$

et, d'après (33),

$$[illegible] \geq \log_i \frac{n-r_1}{l}^{\;[illegible]}.$$

Pour [illegible] = [illegible], ceci reste vrai.

Le nombre des termes de $\sum aB$ étant $\leqq n^{\zeta}$ (ζ limité), la somme des modules des termes de $\sum aB$ autres que ceux qui contiennent $\theta_{\alpha''}$ est d'ordre

$$\leqq \frac{n^{\zeta'}}{\left(\log_k \frac{n+r_1}{l_1'}\right)^{\frac{n+r_1}{\rho_1}} \left(\log_k \frac{n+r_1}{l_1}\right)^{\frac{n+r_1}{l_1}\left(\frac{1}{\sigma'}-\frac{1}{\rho}\right)(1+\varepsilon)}},$$

l_1 étant la plus grande des quantités l, qui sont limitées. D'ailleurs (p. 18)

$$\begin{aligned}
\log_k \frac{n+r_1}{l} &= \log_{k-1}[\log(n+r_1) - \log l] \\
&= \log_k(n+r_1) - \frac{(\log l)(1+\eta)}{\log_k(n+r_1)\ldots\log(n+r_1)} \\
&= [\log_k(n+r_1)]^{1+\varepsilon'}, \\
n^{\zeta'} &= [\log_k(n+r_1)]^{n\varepsilon''}, \\
\log_k(n+r_1) &= (\log_k n)^{1+\varepsilon'''}.
\end{aligned}$$

Finalement, la somme $\sum aB$ considérée ci-dessus a comme limite supérieure de son module

$$\left[(\log_k n)^{\frac{n}{\rho_1}(1+\varepsilon_1)} (\log_k n)^{\frac{n}{l_1}\left(\frac{1}{\sigma'}-\frac{1}{\rho}\right)}\right]^{-1},$$

et ne peut se réduire avec le terme unique d'ordre

$$(\log_k n)^{\frac{n}{\rho_1}(1+\varepsilon_2)}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque I. — Il n'est pas difficile d'avoir un exemple de fonction entière d'ordre infini satisfaisant à une équation différentielle rationnelle. Soit

$$y = e^{e^x}, \quad y' = e^x y, \quad \left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{y''y - y'^2}{y^2} = e^x = \frac{y'}{y}, \quad yy' = yy'' - y'^2.$$

Il n'y a qu'un terme en y'', et notre théorème VI est applicable à cette équation différentielle

Remarque II. — Les mêmes méthodes sont évidemment susceptibles d'être appliquées, avec des modifications parfois insignifiantes, à d'autres équations différentielles. Nous allons en voir un exemple.

Théorème VII. — *Toute solution* $\frac{d^j}{dx^j}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right)$, *où* ζ *est une fonction entière d'ordre non transfini d'une équation différentielle*

$$A y^{(k)} = \Phi(y^{(k-1)}, \ldots, y, x),$$

Φ *étant un polynome en* $x, y, \ldots, y^{(k-1)}$, A *un polynome en* x, *a sa croissance régulière.*

C'est le cas, en particulier, pour l'équation $y'' = 6y^2 + x$ *de M. Painlevé* (1), *et pour les équations linéaires, homogènes ou non, dont les coefficients sont des polynomes.*

En effet, considérons l'équation

$$A y^{(k)} = \Phi(y^{(k-1)}, \ldots, y, x).$$

Supposons qu'elle admette une solution de la forme

$$y = \frac{d^j}{dx^j}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right),$$

où ζ est une fonction entière. On a

$$y^{(i)} = \frac{d^{i+j}}{dx^{i+j}}(\zeta'\zeta^{-1}) = \zeta^{(i+j+1)}\zeta^{-1} - C^1_{i+j}\zeta^{(i+j)}\frac{\zeta'}{\zeta^2} - \ldots,$$

$$y^{(i)} = \frac{\zeta^{(i+j+1)}\zeta^{\lambda} + D_1\zeta^{(i+j)}\zeta^{\mu} + \ldots}{\zeta^{\omega}},$$

$\lambda, \mu, \ldots, \omega$ entiers, $D_1, \ldots$ constantes.

(1) Painlevé, *Bull. Soc. math.*, 1900, p. 204.

Après réductions, l'équation différentielle deviendra

$$A\zeta^{(j+k+1)}\zeta^{\varpi} = \Psi(\zeta^{(j+k)}, \ldots, \zeta, x),$$

où ϖ est une constante et Ψ un polynome en $\zeta^{(j+k)}, \ldots, \zeta, x$: notre théorème VI lui est applicable. C. Q. F. D.

VIII.

SYSTÈMES LINÉAIRES.

Certains des théorèmes qui précèdent ne supposent rien de précis sur l'ordre des fonctions entières qui satisfont à des équations différentielles rationnelles. Pour augmenter leur portée, au moins dans certains cas, il est bon d'avoir quelques renseignements sur cet ordre. Les théorèmes IV et V nous en ont déjà donné. Nous allons établir à cet égard par des méthodes différentes un certain nombre de résultats parfois moins précis, mais qui s'étendent à des catégories bien plus vastes d'équations différentielles linéaires.

Il nous suffira, pour cela, de généraliser des propriétés des systèmes d'équations différentielles linéaires indiquées [1] par M. Liapounoff.

THÉORÈME VIII. — *Soit le système*

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{array}\right.$$

où $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ sont des fonctions quasi-entières aux environs d'un point singulier essentiel isolé commun que nous pouvons supposer être $t = \infty$; si ces fonctions sont d'ordre au plus égal à celui de $e_{k+1}(t^\rho)$ pour $t = \infty$, $x_1, \ldots, x_n$ sont d'ordre de grandeur au plus égal à celui de $e_{k+2}(|t|^{\rho+\varepsilon})$ (ε positif, fini, aussi petit que l'on veut) pour $t = \infty$.

[1] PICARD, *Analyse*, t. III, p. 362. Nous suivons la même marche que M. Picard.

Si, en particulier, $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ sont des polynomes de degré $\leqq \varpi$, ou égales à (¹) *un polynome + un terme monodrome et fini pour $t = \infty$, on peut trouver un nombre λ positif tel que $|x_1|, \ldots, |x_n|$ soient d'ordre $e^{\lambda|t|^{\varpi+1}}$.*

Soit $t = re^{i\omega}$, $te^{-i\omega} = r$, où r est réel et ω constant;

$$a_{jl} = b_{jl} + ic_{jl}, \qquad x_j = x'_j + ix''_j,$$
$$\frac{dx_p}{dt} = \frac{dx_p}{dr}(\cos\omega - i\sin\omega) = (\cos\omega - i\sin\omega)\left(\frac{dx'_p}{dr} + i\frac{dx''_p}{dr}\right).$$

Ici b_{jl}, c_{jl}, x'_j, x''_j sont réels avec r. Les équations (24) donnent alors un système analogue de $2n$ équations en $x'_1, \ldots, x'_n, x''_1, \ldots, x''_n$, où les coefficients sont des fonctions quasi-entières de r pour $r = \infty$, réelles pour r réel, et d'ordre non transfini.

Si, d'après notre *Terminologie* (²), l'ordre maximum des fonctions a_{jl} est (k, ρ), c'est-à-dire $\leqq$ celui de $e_{k+1}(r^\rho)$ pour $|t| = r$ assez grand, il en sera de même pour les fonctions b_{jl}, c_{jl} du nouveau système différentiel.

Finalement, nous sommes ramené à un système analogue à (24) où la variable ne prend que des valeurs réelles.

Ceci posé, soit

$$x_q = y_q e_{k_1+2}(t^{\rho_1})^\mu \qquad (\mu = \pm 1),$$
$$\frac{dx_q}{dt} = \frac{dy_q}{dt} e_{k_1+2}(t^{\rho_1})^\mu + \mu\rho_1 y_q e_{k_1+2}(t^{\rho_1})^\mu e_{k_1+1}(t^{\rho_1}) \ldots e_1(t^{\rho_1}) t^{\rho_1-1}.$$

En substituant dans (24), on aura le système

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy_1}{dt} = (a_{11} - \mu\rho_1 e_{k_1+1}(t^{\rho_1}) \ldots t^{\rho_1-1}) y_1 + a_{12} y_2 + \ldots + a_{1n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1} y_1 + \ldots + (a_{nn} - \mu\rho_1 e_{k_1+1}(t^{\rho_1}) \ldots e_1(t^{\rho_1}) t^{\rho_1-1}) y_n. \end{array}\right.$$

(¹) Nous dirons alors que ces fonctions sont des *quasi-polynomes pour $t = \infty$*.

(²) Pages 1 et 2.

D'où, en multipliant les deux membres par $y_1, \ldots, y_n$ respectivement et ajoutant,

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d(y_1^2+\ldots+y_n^2)}{dt} &= (a_{11} - \mu\rho_1 e_{k_1+1}(t^{\rho_1})\ldots t^{\rho_1-1}y_1^2 \\ &\quad + a_{12}y_2y_1 + a_{21}y_1y_2 + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Or, soit

$$f(y_1, \ldots, y_n) = A_{11}y_1^2 + 2A_{12}y_1y_2 + \ldots + 2A_{1n}y_1y_n + A_{22}y_2^2 + \ldots$$

la forme quadratique du deuxième membre de (26). On a

$$f = A_{11}y_1^2 + 2Py_1 + Q,$$

où P ne contient pas ρ_1;

$$f = \frac{1}{A_{11}}(A_{11}y_1 + P)^2 + Q - \frac{P^2}{A_{11}}.$$

Supposons k_1 et ρ_1 assez grands; soit $\mu = +1$: A_{11} est négatif dès que t est assez grand. $Q - \frac{P^2}{A_{11}}$ est une forme quadratique à $n-1$ variables, analogue à f, où les coefficients de $y_2^2, \ldots, y_n^2$ sont négatifs dès que t est assez grand et sur laquelle on peut raisonner de la même manière. Finalement on voit que f est une somme

$$f = \alpha_1 P_1^2 + \ldots + \alpha_n P_n^2$$

de n carrés, où $P_1, \ldots, P_n$ sont réels, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ négatifs dès que $t > \tau$, τ nombre fini réel assez grand (quand $\mu = -1$ c'est l'inverse) [1].

[1] Aucun de ces n carrés n'est identiquement nul. En effet, $A_{11} \neq 0$; de plus, $Q - \frac{P^2}{A_{11}}$ contient effectivement pour k_1, ρ_1, t assez grand les $n-1$ carrés $y_2^2, \ldots, y_n^2$, c'est-à-dire est identiquement de la même forme que f, avec une variable de moins. De plus, parmi ces carrés, le premier seul contient y_1; parmi les $n-1$ autres, le premier seul contient y_2, etc.; donc ces carrés sont linéairement indépendants.

Si $t > \tau$,

$$\frac{d(y_1^2+\ldots+y_n^2)}{dt} < 0 \qquad (> 0 \text{ quand } \mu = -1).$$

Lorsque t varie de τ à $+\infty$, $y_1^2+\ldots+y_n^2$ va en diminuant : les valeurs absolues des produits

$$y_q = x_q\left[e_{k_1+2}(t^{\rho_1})\right]^{-1}$$

sont toutes limitées supérieurement.

On voit que, ici, il suffit de prendre $k_1 = k+1$, $\rho_1 = \rho + \varepsilon$, ε positif aussi petit que l'on veut, mais fini.

Cette propriété reste vraie quel que soit ω.

Si, en particulier, les a_{jl} sont des polynomes de degré $\leqq \varpi$, il suffit de prendre $\rho_1 = \varpi + 1 + \varepsilon$, $k_1 = 0$; même

$$x_q e^{-\lambda t^{\varpi+1}}$$

reste limité quand $\frac{1}{t}$ tend vers o et que λ est positif et assez grand, c'est-à-dire que l'on peut déterminer λ de façon que

$$|x_q| \leqq e^{\lambda |t|^{\varpi+1}}.$$

Il en est de même quand les a_{jl} sont des *quasi-polynomes*.

C. Q. F. D.

Corollaire. — *Ceci s'étend de suite au cas d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n dont les coefficients sont des fonctions quasi-entières d'ordre non transfini pour $t = \infty$; en particulier, toute fonction quasi-entière pour $t = \infty$ solution d'une équation différentielle linéaire homogène, dont les coefficients sont des fonctions quasi-entières pour $t = \infty$ d'ordre non transfini (k, ρ), est d'ordre $\leqq (k+1, \rho)$. Si les coefficients de l'équation sont des polynomes, la solution est d'ordre fini.*

Remarque I. — Ceci nous montre tout l'intérêt d'une classification plus précise des fonctions entières, comme M. E. Lindelöf [1], par exemple, en a entamé une : une pareille classification permettra, sans doute, d'obtenir une limite supérieure plus précise de $|x_1|, \ldots, |x_n|$.

Remarque II. — Quand, dans la démonstration du théorème précédent, on prend $\mu = -1$, on a

$$\frac{d(y_1^2 + \ldots + y_n^2)}{dt} \geqq 0.$$

Lorsque t varie de τ à $+\infty$, $y_1^2 + \ldots + y_n^2$ croît et a [2] une limite inférieure finie > 0 pour $t = \infty$. Parmi les n fonctions

$$x_q e_{k_1+2}(t^{\rho_1})^{-1},$$

une au moins a son module limité inférieurement pour $t = \infty$ et est $\neq 0$. Il suffit de prendre $k_1 = k + 1$, $\rho_1 = \rho + \varepsilon$, si les a_{jl} sont des fonctions quasi-entières d'ordre $\leqq (k, \rho)$ pour $t = \infty$, pour que cette propriété ait lieu.

Si les a_{jl} sont des quasi-polynomes de degré ϖ au plus, une au moins des n fonctions

$$\left| x_q e^{+\lambda' t^{\varpi+1}} \right|$$

(λ' positif assez grand) a une limite inférieure finie > 0 pour $t = \infty$.

Ces propriétés sont vraies quel que soit ω. Mais, quand ω varie, rien

---

[1] *Loc. cit.*

[2] On ne peut avoir, $P_1, \ldots, P_n$ étant indépendants (p. 73),

$$\frac{d(y_1^2 + \ldots + y_n^2)}{dt} = 0,$$

dans un intervalle fini, que si $y_1 = \ldots = y_n = 0$, d'où $x_1 = \ldots = x_n = 0$, cas que l'on peut laisser de côté. Cette égalité n'aura donc lieu qu'en un certain nombre de points isolés. En dehors, $y_1^2 + \ldots + y_n^2$ est fonction constamment croissante de t, c'est-à-dire qu'une de ces quantités au moins, y_q^2, par exemple, ou $|y_q|$, est fonction constamment croissante de t, par suite est > 0.

ne prouve, *a priori*, que la ou les valeurs de q restent les mêmes. On peut même affirmer que cela ne doit pas toujours arriver, par exemple, si x_q est une fonction entière ayant une infinité de zéros. Ce résultat comporte néanmoins une interprétation au point de vue de l'étude des zéros des x_q. *Ces fonctions ne s'annulent simultanément en aucun point du domaine de* $t = \infty$. Ceci est d'ailleurs une conséquence immédiate du théorème de Cauchy sur l'existence des solutions [1].

Remarque III. — On peut chercher à étendre les résultats obtenus dans ce paragraphe au cas où les a_{jl} sont quasi-méromorphes d'ordre non transfini pour $t = \infty$, c'est-à-dire sont monodromes et d'ordre non transfini dans le domaine de $t = \infty$ qui est pour les a_{jl} un point singulier essentiel isolé commun : a_{jl} étant le quotient de deux fonctions quasi-entières pour $t = \infty$, nous nous bornons au cas où la fonction dénominateur est d'ordre fini ou un polynome. Isolons les pôles des a_{jl} dans ce domaine par des cercles C de rayon r_1 assez petit ayant pour centres ces pôles. Considérons encore un argument déterminé ω. Si la droite $\omega =$ const. ne rencontre qu'un nombre fini de ces cercles, ce qui a toujours lieu quand la fonction dénominateur est un polynome, on pourra raisonner de la même manière. Nous reviendrons ultérieurement sur le cas général.

Quand l'ordre est infini, le résultat annoncé dans l'introduction doit être considéré seulement comme probable. Nous n'en possédons pas encore la démonstration.

Enfin, on peut chercher à étendre aux systèmes linéaires dont les coefficients sont des polynomes les théorèmes que nous avons obtenus en ce qui concerne la régularité de croissance des fonctions entières satisfaisant aux équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des polynomes.

---

[1] De même une solution d'une équation différentielle linéaire homogène n'a en général aucun zéro d'ordre de multiplicité $\geq n$ en dehors des points critiques.

Théorème IX. — *Soit $x_1, \dots, x_n$ un système de solutions du système d'équations différentielles*

$$\left\{\begin{array}{l} A_1 \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_n \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n, \end{array}\right.$$

où $A_1, \dots, A_n, a_{11}, \dots, a_{nn}$ sont des polynomes : si x_q $(q = 1, 2, \dots$ ou $n)$ est une fonction entière, son ordre est fini et sa croissance régulière.

En effet, prenons $n - 1$ fois les dérivées successives des deux membres de la première équation, en éliminant chaque fois $\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$ et les dérivées de x_1, sauf une, à l'aide des n équations du système et des équations successivement obtenues. Nous aurons

$$\left\{\begin{array}{l} B_2 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = b_{21}x_1 + \dots + b_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ B_n \dfrac{d^nx_1}{dt^n} = b_{n1}x_1 + \dots + b_{nn}x_n. \end{array}\right.$$

En effet, soit

$$B_m \frac{d^m x}{dt^m} = b_{m1}x_1 + \dots + b_{mn}x_n.$$

On en tire

$$B_m \frac{d^{m+1}x}{dt^{m+1}} + \frac{dB_m}{dt}\frac{d^m x}{dt^m} = b_{m1}\frac{dx_1}{dt} + x_1\frac{db_{m1}}{dt} + \dots,$$

et l'élimination donne

$$B_{m+1} \frac{d^{m+1}x}{dt^{m+1}} = b_{m+1,1}x_1 + \dots + b_{m+1,n}x_n.$$

L'élimination de $x_2, \ldots, x_n$ nous donne

$$\begin{vmatrix} A_1 \dfrac{dx_1}{dt} - a_{11}x_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ B_2 \dfrac{d^2x_1}{dt^2} - b_{21}x_1 & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_n \dfrac{d^nx_1}{dt^n} - b_{n1}x_1 & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire une équation différentielle linéaire homogène à coefficients rationnels d'ordre n. Si x_1 est une fonction entière, nous savons, d'après le théorème VIII, que x_1 est d'ordre fini; par application d'un théorème connu (¹), nous savons que x_1 a sa croissance régulière.

C. Q. F. D.

Bourg-la-Reine, 30 septembre 1903.

(¹) *Ann. Fac. Toul.*, 1902, p. 456.

SUR LA

SIMILITUDE DANS LE MOUVEMENT DES FLUIDES,

PAR M. E. JOUGUET.

1. C'est à propos du mouvement des fluides que Newton a imaginé son célèbre théorème sur la similitude en Mécanique [1]. Toutefois, on verra par ce qui va suivre que les applications qu'il en a faites à ce sujet ne sont pas sans soulever plusieurs difficultés et qu'elles sont subordonnées à des hypothèses sur la constitution des fluides qui en limitent la portée. Dans la Note où il a si vivement mis en lumière et si heureusement perfectionné le théorème de Newton [2], Bertrand a bien donné quelques indications sur la légitimité de son emploi dans l'étude des fluides, mais nous ne trouvons pas ces indications entièrement satisfaisantes et même la démonstration que propose Bertrand pour un théorème fondamental de la théorie des turbines ne peut être acceptée qu'avec les plus grandes réserves. Dans le dernier Chapitre de son *Cours de Mécanique* [3], Reech a rajeuni quelques-uns des résultats de Newton mais sans s'affranchir tout à fait, à notre avis, des objections qu'on peut leur faire. Il nous a paru intéressant de reprendre, en nous fondant sur les principes de la Thermodynamique, la question de la similitude dans le mouvement des fluides; nous croyons qu'il est possible, en suivant cette voie, de perfectionner sur quelques points de détail la belle théorie de

[1] *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle,* Livre II, 7e section.

[2] *Note sur la similitude en Mécanique* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXIIe Cahier, 1848, p. 189).

[3] *Cours de Mécanique d'après la nature généralement flexible et élastique des corps,* 1852, p. 265.

Newton, et il nous semble que la recherche du détail est permise en un sujet qui touche aux principes.

I.

L'équation générale de la Thermodynamique. — **2.** Commençons par rappeler diverses formes que l'on peut donner à l'équation générale de la Thermodynamique. Nous supposerons tout d'abord un système matériel déterminé par un nombre *fini* de variables normales $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, T, la lettre T représentant la température absolue. Soient $\mathcal{F}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, T)$ le potentiel interne, $\delta f = f_\alpha \delta\alpha + \ldots + f_\lambda \delta\lambda$ le travail virtuel des actions de viscosité, $\delta\mathfrak{C}_e = A\,\delta\alpha + \ldots + L\,\delta\lambda$ celui des actions extérieures, δj celui des forces d'inertie. Une lettre quelconque, i par exemple, mise en indice après la caractéristique δ indiquera que la différentiation marquée par δ doit être effectuée en laissant constante la quantité représentée par la lettre i. Enfin, nous supposerons toujours les quantités de chaleur exprimées en unités dynamiques. L'équation générale de la Thermodynamique s'écrit alors

$$\delta_T \mathcal{F} - \delta f - \delta\mathfrak{C}_e - \delta j = 0. \tag{1}$$

3. On peut donner d'autres formes à cette équation. Considérons l'entropie S et l'énergie interne U

$$\left\{\begin{aligned} S &= -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \\ U &= \mathcal{F} - T\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Prenons une fonction absolument arbitraire $\varphi(T)$ de la température. Sa dérivée est $\varphi'(T)$. Posons

$$\sigma = S(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, T) - \varphi'(T). \tag{3}$$

De (3) nous pouvons tirer T en fonction de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \sigma$. Rempla-

çons T par cette valeur dans la fonction

$$U(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, T) - T\varphi'(T) + \varphi(T),$$

qui devient ainsi une fonction

$$\Upsilon(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \sigma).$$

On a identiquement

$$\mathcal{F} + \varphi(T) + T\sigma = \Upsilon. \tag{4}$$

Donc

$$\delta_T \mathcal{F} + \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} + \varphi'(T) + \sigma\right] \delta T + T\,\delta\sigma = \delta\Upsilon,$$

ou, par (3),

$$\delta_T \mathcal{F} + T\,\delta\sigma = \delta\Upsilon. \tag{5}$$

On tire immédiatement de là les formules importantes

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial \sigma} = T \tag{6}$$

et

$$\delta_T \mathcal{F} = \delta_\sigma \Upsilon. \tag{7}$$

L'équation (7) montre que l'équation fondamentale (1) peut prendre la forme

$$\delta_\sigma \Upsilon - \delta f - \delta \mathfrak{T}_e - \delta j = 0. \tag{8}$$

Comme cas particulier, la condition d'équilibre du système peut s'écrire soit

$$\delta_T \mathcal{F} - \delta \mathfrak{T}_e = 0, \tag{9}$$

soit

$$\delta_\sigma \Upsilon - \delta \mathfrak{T}_e = 0. \tag{10}$$

4. Suivant les cas, il est avantageux d'utiliser l'équation (1) ou l'équation (8).

On sait que l'équation générale de la Thermodynamique doit toujours être complétée par une *relation supplémentaire* pour que le problème du mouvement d'un système soit entièrement déterminé. Cette relation dépend des conditions auxquelles est assujetti le système.

Les cas les plus simples sont ceux où la température et l'entropie doivent rester fonctions l'une de l'autre. Cela peut arriver de deux manières.

En premier lieu, la température peut être assujettie à rester constante. La relation supplémentaire est alors

$$T = \text{const.};$$

la forme la plus commode de l'équation générale de la Thermodynamique est (1). Désignons la force vive par W, et supposons que les actions extérieures admettent un potentiel $\Omega(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ qui est forcément indépendant de T, puisque les variables sont normales. Remplaçons alors dans (1) les modifications virtuelles par les *réelles ;* nous obtenons l'équation des forces vives

$$dW + d_T(\Omega + \mathcal{F}) = df. \tag{11}$$

N'oublions pas que T doit rester constant; il y aurait donc une intégrale des forces vives si la viscosité était nulle.

En second lieu, l'entropie peut être assujettie à rester fonction de T, ce qui peut s'exprimer par [1]

$$\sigma = \text{const.};$$

c'est alors la forme (8) qui est la plus commode. L'équation des forces

---

[1] Il peut arriver que la condition $\sigma = \text{const.}$ soit vérifiée par suite de la nature même du système; dans ce cas, cette condition est une *identité* et non plus une relation supplémentaire. Il est alors impossible de tirer T de (3), et notre définition de Υ tombe en défaut. Nous laissons ce cas de côté.

vives s'écrit

$$(12) \qquad dW + d_\sigma(\Omega + \Upsilon) = df,$$

et, comme σ est constant, il y a une intégrale des forces vives si la viscosité est nulle.

Supposons qu'il y ait un potentiel des actions extérieures et que le système soit en équilibre. On a, par (9) et (10),

$$(13) \qquad \delta_T(\mathcal{F} + \Omega) = 0,$$

$$(14) \qquad \delta_\sigma(\Upsilon + \Omega) = 0.$$

Pour discuter la stabilité de cet équilibre il faut savoir à quelles conditions sont soumises les petites oscillations autour de lui, c'est-à-dire quelle relation supplémentaire convient à ces petites oscillations. Supposons les petits mouvements *isothermes ;* les équations (11) et (13) permettront de montrer, par le raisonnement de Dirichlet, que, si la fonction $\mathcal{F} + \Omega$, dans laquelle on suppose T constant, est minima, l'équilibre est stable. Supposons au contraire que les petits mouvements se fassent *à σ constant;* les équations (12) et (14) permettent de prouver de même que, si $\Upsilon + \Omega$, où l'on suppose σ constant, est minimum, l'équilibre est stable.

5. Peut-on donner un sens physique à la relation supplémentaire $\sigma = \text{const.}$?

Quand il n'y a pas de viscosité, cette relation comprend un cas particulier important, celui où $\varphi(T)$, qui est arbitraire, est nul. Les mouvements sont alors adiabatiques, et Υ se réduit à U.

Quand il y a viscosité, la relation $\sigma = \text{const.}$ n'a plus de sens physique. Mais considérons dans ce cas la relation supplémentaire

$$(15) \qquad T\,d\sigma = -df.$$

Celle-là comprend le cas particulier de $T\,dS = -df$, soit des modifications *adiabatiques*, puisque $T\,dS + df$ n'est autre chose que la *chaleur reçue.*

L'équation (8) donne, pour l'équation des forces vives.

$$d\mathrm{W} + d(\Omega + \Upsilon) - \frac{\partial\Upsilon}{\partial\sigma}d\sigma - df = 0$$

ou, vu (6), et puisque (15) est vérifiée,

$$(16) \qquad d\mathrm{W} + d(\Omega + \Upsilon) = 0.$$

Considérons $\Omega + \Upsilon$ comme une fonction de α, β, ..., λ seuls, σ restant constant, et imaginons que cette fonction soit *minima* pour la position d'équilibre, c'est-à-dire que

$$(17) \qquad \delta^2_\sigma(\Omega + \Upsilon) > 0.$$

Dans la position d'équilibre on a

$$(18) \qquad \delta(\Omega + \Upsilon) = \frac{\partial(\Omega - \Upsilon)}{\partial\sigma}\delta\sigma = \frac{\partial\Upsilon}{\partial\sigma}\delta\sigma = \mathrm{T}\,\delta\sigma.$$

Cette expression est positive si $\delta\sigma > 0$. La combinaison de (17) et de (18) donne donc le résultat suivant : « Considérons un état voisin de l'état d'équilibre, mais où σ soit supérieur ou égal à ce qu'il est dans l'état d'équilibre. $\Omega - \Upsilon$ est plus grand dans cet état voisin que dans l'état d'équilibre. »

Envisageons alors de petites oscillations au cours desquelles la liaison (15) est vérifiée. Dans ces mouvements, $d\sigma$ est positif, σ croît. Par suite on peut, en faisant sur (16) le raisonnement de Dirichlet, montrer que l'équilibre est stable au regard de ces petits mouvements.

En particulier, l'équilibre adiabatique d'un système affecté de viscosité est stable si $\Omega - \mathrm{U}$, considéré comme fonction de α, β, ..., λ seuls, est minimum.

Cas des fluides. — 6. Appliquons l'équation générale de la Thermodynamique à un fluide formé d'éléments de masse D*m* soudés [1] entre

---

[1] Ce mot est pris dans le sens que lui donne M. Duhem (*Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques*, 1896, p. 15).

eux, chacun étant défini par la connaissance de sa densité ρ et de sa température T. Nous laissons de côté toute complication relative à la présence possible d'une variable chimique ; nous nous bornons aux fluides dans les conditions ordinaires de l'Hydrodynamique. Pour simplifier, nous supposons même négligeables les actions des éléments les uns sur les autres, de sorte que le potentiel interne de la masse totale est de la forme

$$\mathbf{S}\,\mathcal{F}(\rho, \mathrm{T})\,\mathrm{D}m.$$

Dans cette notation, la fonction $\mathcal{F}$ devient maintenant le potentiel interne de l'unité de masse du fluide, prise dans un état homogène.

Le travail virtuel des forces d'inertie est

$$-\mathbf{S}\,(j_x\,\delta x + j_y\,\delta y + j_z\,\delta z)\,\mathrm{D}m,$$

$\overline{j}_x + \overline{j}_y + \overline{j}_z$ étant l'accélération.

Les actions extérieures s'exerçant sur le fluide sont de deux sortes. Les unes sont appliquées à la masse de chaque élément et leur travail virtuel est

$$\mathbf{S}\,(\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z)\,\mathrm{D}m;$$

les autres s'exercent à la périphérie et donnent le travail

$$\sum (\mathrm{P}_x\,\delta x + \mathrm{P}_y\,\delta y + \mathrm{P}_z\,\delta z)\,d\Sigma,$$

$d\Sigma$ étant un élément de la surface qui limite, *à l'instant t*, la masse fluide, et l'intégrale $\sum$ s'étendant à toute cette surface.

Nous supposerons pour commencer qu'il n'y a pas de viscosité. L'équation (1) prend la forme

$$\begin{aligned}\mathbf{S}\,\delta_{\mathrm{T}}\mathcal{F}\,\mathrm{D}m - \mathbf{S}\,(\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z)\,\mathrm{D}m \\ + \mathbf{S}\,(j_x\,\delta x + j_y\,\delta y + j_z\,\delta z)\,\mathrm{D}m \\ - \sum (\mathrm{P}_x\,\delta x + \mathrm{P}_y\,\delta y + \mathrm{P}_z\,\delta z)\,d\Sigma = 0.\end{aligned}$$

De même, en posant

$$U = \mathfrak{F} - T\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial T} \quad \text{et} \quad \Upsilon = U - T\varphi'(T) + \varphi(T),$$

U et Υ sont deux fonctions qui se rapportent à l'unité de masse et l'équation (8) s'écrit

$$\begin{aligned} &\mathbf{S}\,\delta_\sigma \Upsilon - \mathbf{S}(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,Dm \\ &\quad + \mathbf{S}(j_x\,\delta x + j_y\,\delta y + j_z\,\delta z)\,Dm \\ &\quad - \sum (P_x\,\delta x + P_y\,\delta y + P_z\,\delta z)\,d\Sigma = 0. \end{aligned}$$

Désignons par i l'une des quantités T ou σ, et par $\Phi(\rho, i)$ la fonction $\mathfrak{F}$ de ρ et de T ou la fonction Υ de ρ et de σ. Les deux équations précédentes peuvent se grouper dans le seul symbole

$$\begin{aligned} (19) \qquad &\mathbf{S}\,\delta_i \Phi\,Dm - \mathbf{S}(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,Dm \\ &\quad + \mathbf{S}(j_x\,\delta x + j_y\,\delta y + j_z\,\delta z)\,Dm \\ &\quad - \sum (P_x\,\delta x + P_y\,\delta y + P_z\,\delta z)\,d\Sigma = 0. \end{aligned}$$

Choisissons un état initial bien déterminé, dans lequel chaque élément Dm a pour coordonnées a, b, c. A l'instant t l'élément $Dm(a, b, c)$ a pour coordonnées x, y, z, qui sont fonctions de a, b, c, t.

Transformons (19) de manière à n'y laisser subsister que les variations de x, y, z.

On a

$$\delta_i \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}\,\delta\rho.$$

La variation $\delta\rho$ est celle que subit la densité d'un élément Dm *bien déterminé* dans un déplacement virtuel δx, δy, δz. On sait que

$$\delta\rho = -\rho\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right).$$

Donc

$$\mathop{\mathbf{S}} \delta_i \Phi \, \mathrm{D}m = - \mathop{\mathbf{S}} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \, \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \, \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \, \delta z}{\partial z} \right) \rho^2 \, dx \, dy \, dz.$$

On peut intégrer par parties. Soit N la normale à la surface du fluide dirigée vers l'extérieur :

$$\mathop{\mathbf{S}} \delta_i \Phi \, \mathrm{D}m = - \sum \rho^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \left[\delta x \cos(\mathrm{N}, x) + \delta y \cos(\mathrm{N}, y) + \delta z \cos(\mathrm{N}, z) \right] d\Sigma$$
$$+ \mathop{\mathbf{S}} \left(\frac{\partial \rho^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \rho^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \rho^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho}}{\partial z} \delta z \right) \frac{\mathrm{D}m}{\rho},$$

ou encore

$$\mathop{\mathbf{S}} \delta_i \Phi \, \mathrm{D}m = - \sum \rho^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \left[\delta x \cos(\mathrm{N}, x) + \delta y \cos(\mathrm{N}, y) + \delta z \cos(\mathrm{N}, z) \right] d\Sigma$$
$$+ \mathop{\mathbf{S}} \left(2 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \rho}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \rho}{\partial z} \delta z \right) \mathrm{D}m$$
$$+ \mathop{\mathbf{S}} \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \, \partial i} \left(\frac{\partial i}{\partial x} \delta x + \frac{\partial i}{\partial y} \delta y + \frac{\partial i}{\partial z} \delta z \right) \mathrm{D}m.$$

L'équation (19) devient donc

$$(20) \quad \mathop{\mathbf{S}} \Big\{ \left[\left(2 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \, \partial i} \frac{\partial i}{\partial x} - \mathrm{X} + j_x \right] \delta x$$
$$+ \left[\left(2 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \, \partial i} \frac{\partial i}{\partial y} - \mathrm{Y} + j_y \right] \delta y$$
$$+ \left[\left(2 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \, \partial i} \frac{\partial i}{\partial z} - \mathrm{Z} + j_z \right] \delta z \Big\} \mathrm{D}m$$
$$- \sum \Big\{ \left[\mathrm{P}_x + \rho^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \cos(\mathrm{N}, x) \right] \delta x + \left[\mathrm{P}_y + \rho^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \cos(\mathrm{N}, y) \right] \delta y$$
$$+ \left[\mathrm{P}_z + \rho^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \cos(\mathrm{N}, z) \right] \delta z \Big\} d\Sigma = 0.$$

Il faudra, pour avoir les équations du mouvement, égaler à zéro les coefficients de δx, δy, δz dans les intégrales de volume et de surface.

Pour l'étude des intégrales de surface, il faudra faire intervenir les

conditions aux limites. Notre but, rappelons-le, est la comparaison des mouvements de deux masses fluides semblables. Les masses ne sont semblables que si les conditions aux limites le sont. Ce point demande des éclaircissements, et il y a lieu, pour les donner, de distinguer deux cas.

Il peut arriver que les conditions aux limites soient purement géométriques : par exemple les molécules doivent suivre une paroi solide donnée. Dans ce cas, les forces $(\overline{P_x} + \overline{P_y} + \overline{P_z})d\Sigma$ sont des forces de liaison non données, que l'on détermine précisément par la condition d'annuler les intégrales de surface de (20). Pour que les conditions aux limites soient semblables, il suffit qu'elles le soient *géométriquement ;* d'elles-mêmes les pressions P_x, P_y, P_z prendront des valeurs compatibles avec la similitude dynamique du système.

Les conditions aux limites peuvent aussi être dynamiques; par exemple, à la surface libre d'un liquide, la pression est donnée et égale à la pression atmosphérique. Dans ces conditions, la similitude géométrique des conditions aux limites n'entraîne pas *ipso facto* leur similitude dynamique; pour qu'elles soient dites semblables quand on passe d'un système fluide à un autre, il faut non seulement qu'elles le soient géométriquement, mais encore que les travaux virtuels des forces $(\overline{P_x} + \overline{P_y} + \overline{P_z})d\Sigma$ *données* soient dans le même rapport que ceux des forces $(\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z})Dm$ *également données*.

Nous supposerons toujours, quand nous comparerons deux systèmes fluides, que les conditions aux limites sont *complètement semblables* dans l'un et dans l'autre. Dans ces conditions nous n'aurons pas à nous occuper des intégrales de surface dans (20).

7. Pour achever la détermination du mouvement, il faut ajouter à (20) l'équation de continuité et la relation supplémentaire. La première s'écrit, u, v, w désignant les composantes de la vitesse sur les trois axes,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \tag{21}$$

Nous supposerons que la seconde exprime que l'i d'un élément déterminé reste constant, et qu'elle est par conséquent

$$\frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial i}{\partial x}u + \frac{\partial i}{\partial y}v + \frac{\partial i}{\partial z}w = 0. \tag{22}$$

II.

Petits mouvements. — **8.** Commençons par étudier les *petits mouvements* et cela en supposant $X = Y = Z = 0$.

On sait que

$$j_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Les intégrales de volume de (20) donnent donc des équations aux dérivées partielles en ρ, i, u, v, w. Nous supposerons que les petits mouvements s'effectuent autour *d'un état initial d'équilibre homogène*. Dès lors, i étant le même dans l'état initial pour tous les éléments et restant le même au cours du mouvement pour chaque élément, il est évident que $\frac{\partial i}{\partial x}, \frac{\partial i}{\partial y}, \frac{\partial i}{\partial z}, \frac{\partial i}{\partial t}$ sont nuls. Affectons de l'indice o les quantités qui se rapportent à l'état initial. Les équations du problème sont, avec les approximations reçues dans l'étude des petits mouvements,

$$\left(2\frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho_0} + \rho_0\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \rho_0^2}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$
$$\left(2\frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho_0} + \rho_0\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \rho_0^2}\right)\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$
$$\left(2\frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho_0} + \rho_0\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \rho_0^2}\right)\frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0,$$

qui se déduisent de (20), et

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0,$$
$$i = \text{const.},$$

qui se déduisent de (21), (22).

Puisqu'il s'agit de petits mouvements autour d'un état initial homogène, les coefficients $2\frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho_0} + \rho_0 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \rho_0^2}$ et ρ_0 peuvent être considérés comme constants dans le temps et dans l'espace. Admettons que la vitesse des ondes V dépende uniquement de ces coefficients (*a priori* rien ne dit qu'elle ne dépende pas d'autre chose, de la forme des ondes par exemple); on aura

$$V^2 = \psi\left(\rho_0, 2\frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho_0} + \rho_0 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \rho_0^2}\right). \tag{23}$$

Considérons deux masses fluides indéfinies ou soumises à des conditions aux limites semblables. Envisageons-les comme des systèmes semblables dont les longueurs sont dans le rapport α. Soit β le rapport des masses homologues, c'est-à-dire des masses occupant des volumes dont le rapport est α^3. Le rapport des densités est $\frac{\beta}{\alpha^3}$. Soit enfin λ le rapport des quantités $2\frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho_0} + \rho_0 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \rho_0^2}$.

Si les fonctions ρ, u, v, w de x_1, y_1, z_1, t_1 sont des intégrales des équations du mouvement pour le premier fluide, il est évident, par la forme de ces équations, que $\frac{\beta}{\alpha^3}\rho$, $\frac{\alpha}{\varepsilon}u$, $\frac{\alpha}{\varepsilon}v$, $\frac{\alpha}{\varepsilon}w$, considérées comme fonctions des variables $x_2 = \alpha x_1$, $y_2 = \alpha y_1$, $z_2 = \alpha z_1$, $t_2 = \varepsilon t_1$, seront des solutions pour le second fluide, pourvu que

$$\varepsilon^2 = \frac{\alpha^5}{\beta\lambda}. \tag{24}$$

ε sera le rapport des temps dans lesquels seront décrits des mouvements semblables. Par suite les vitesses V des ondes seront dans le rapport $\frac{\alpha}{\varepsilon}$.

Si l'on se reporte à (23), ce résultat peut s'écrire, vu (24),

$$\frac{\beta\lambda}{\alpha^3} V^2 = \psi\left[\frac{\beta}{\alpha^3}\rho_0, \lambda\left(2\frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho_0} + \rho_0 \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \rho_0^2}\right)\right].$$

Cette relation, qui doit être vérifiée quels que soient β, α, λ, montre

que

$$V^2 = M\rho_0\left(2\frac{\partial\Phi_0}{\partial\rho_0} + \rho_0\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\rho_0^2}\right),$$

M étant un coefficient numérique. La quantité $2\frac{\partial\Phi_0}{\partial\rho_0} + \rho_0\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\rho_0^2}$ varie naturellement quand on passe d'un gaz à un autre. Elle varie aussi quand, pour un même gaz, on passe d'un mouvement isotherme à un mouvement adiabatique.

Le théorème que nous venons de démontrer a été obtenu par Bertrand. Il nous a paru intéressant de le reprendre en insistant sur les diverses hypothèses qu'il faut faire pour y parvenir.

Un théorème de Newton. — **9.** Quittons maintenant les petits mouvements et attachons-nous à la démonstration du corollaire I de la proposition XXXII du Livre II des *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle*. C'est, pour les fluides, le résultat le plus important que Newton ait déduit de la théorie de la similitude.

Nous supposerons toujours $X = Y = Z = 0$ et nous laisserons toujours de côté, sous le bénéfice des remarques qui terminent l'article **6**, les forces P_x, P_y, P_z.

$\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}$ est une fonction $g(\rho, i)$ de ρ et de i. Elle est $g_1(\rho, i)$ pour un premier fluide, $g_2(\rho, i)$ pour un second. Nous dirons que les deux fluides 1 et 2 sont *physiquement semblables* si

$$(25) \qquad g_2\left(\frac{\beta}{\alpha_3}\rho, \theta i\right) = \lambda g_1(\rho, i),$$

β, α, θ, λ étant des *constantes* et $\frac{\beta}{\alpha^3}$ et θ étant *arbitraires*.

Supposons que les deux fluides 1 et 2 soient physiquement semblables au sens que nous venons de définir. Supposons en outre que, dans un certain état initial, les quantités que nous en considérions affectent des dispositions semblables au point de vue des longueurs, des masses et de la

variable i, c'est-à-dire que, dans cet état initial, il y ait, dans toute l'étendue des systèmes considérés, un rapport de similitude α pour les longueurs homologues, un rapport de similitude β pour les masses homologues, et un rapport θ pour les variables i relatives aux points homologues. Si ρ, u, v, w, i sont des fonctions de x_1, y_1, z_1, t_1 vérifiant les équations du mouvement (20), (21), (22), il est évident que les expressions

$$\frac{\beta}{\alpha^3}\rho,\quad \frac{\alpha}{\varepsilon}u,\quad \frac{\alpha}{\varepsilon}v,\quad \frac{\alpha}{\varepsilon}w,\quad \theta i,$$

considérées comme fonctions de $x_2 = \alpha x_1$, $y_2 = \alpha y_1$, $z_2 = \alpha z_1$, $t_2 = \varepsilon t_1$, sont aussi solutions des mêmes équations, pourvu que

$$\varepsilon^2 = \frac{\alpha^5}{\beta\lambda}. \tag{26}$$

C'est dire que le second fluide est animé d'un mouvement semblable au premier, le rapport des longueurs étant α, celui des temps ε.

Mettons dans le fluide 1 un corps H_1, dans le fluide 2 un corps H_2 semblable à H_1, le rapport des dimensions linéaires étant α. Nous constituons ainsi deux systèmes semblables, pourvu que leurs conditions aux limites le soient en effet (1), et, les corps H_1 et H_2 se déplaçant dans les fluides 1 et 2, ceux-ci seront animés de mouvements semblables. C'est là la proposition de Newton que nous voulions démontrer. Elle est toutefois soumise à une restriction, *en ce qui concerne les ondes de choc*, dont nous parlerons plus loin (23).

10. Y a-t-il, dans la nature, des fluides *physiquement semblables* au sens que nous avons fixé plus haut? Il est facile de voir que les gaz parfaits nous en fournissent des exemples.

Supposons que la relation supplémentaire soit $T = \text{const.}$ Il convient

(1) En particulier les deux masses fluides peuvent être indéfinies.

de prendre alors pour Φ le potentiel interne $\mathcal{F}$, de sorte que, pour un gaz parfait,

$$g(\rho, T) = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = \frac{RT}{\varpi\rho}.$$

R est une constante, *la même pour tous les gaz,* et ϖ est la *masse moléculaire :*

$$g_2\left(\frac{\beta}{\alpha^3}\rho, \theta T\right) = \frac{R}{\varpi_2}\frac{\theta\alpha^3}{\beta}\frac{T}{\rho} = \frac{\varpi_1}{\varpi_2}\frac{\theta\alpha^3}{\beta}g_1(\rho, T).$$

La condition (25) est donc bien vérifiée, λ ayant la valeur $\frac{\varpi_1}{\varpi_2}\frac{\theta\alpha^3}{\beta}$.

On peut donc appliquer le corollaire de Newton aux mouvements isothermes des gaz parfaits. Il faut, bien entendu, que, dans un état pris comme état initial, les températures aux points homologues soient dans un rapport constant. D'ailleurs, comme la relation $T =$ const. ne peut être satisfaite, physiquement, que si la conductibilité est infinie, il convient de supposer la température uniforme dans toute la masse. Mais la valeur uniforme de la température peut être différente dans le fluide 1 et dans le fluide 2. En particulier, les mouvements isothermes de deux masses d'un même gaz prises à des températures différentes peuvent être semblables.

Supposons au contraire que la relation supplémentaire soit

$$S = \text{const.} \qquad [\varphi(T) = 0].$$

C'est le cas des mouvements adiabatiques. On prendra pour Φ la fonction U et

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = A\frac{R}{\varpi}e^{\frac{S}{c}}\rho^{\frac{R}{\varpi c}-1}.$$

A est une constante qui provient de ce que S n'est défini qu'à une constante près; e est la base des logarithmes népériens, c la chaleur spécifique du gaz sous volume constant.

Nous supposerons que dans l'état initial S a une valeur uniforme pour tous les points du fluide 1, et une valeur uniforme aussi pour tous les

points du fluide 2. Comme S n'est défini qu'à une constante près, on peut supposer qu'il a la même valeur pour les fluides 1 et 2. Cette valeur, il la conservera d'ailleurs au cours du mouvement, en vertu de la relation supplémentaire. Dès lors, on peut faire $\theta = 1$ et l'on voit que

$$g_2\left(\frac{\beta}{\alpha^3}\rho, S\right) = A_2 \frac{R}{\varpi_2} e^{\frac{S}{c_2}} \rho^{\frac{R}{\varpi_2 c_2}-1} \left(\frac{\beta}{\alpha^3}\right)^{\frac{R}{\varpi_2 c_2}-1}.$$

On sait que $\frac{R}{\varpi_2} = C_2 - c_2$, en désignant par C_2 la chaleur spécifique sous pression constante. *Bornons-nous aux gaz parfaits pour lesquels le rapport des chaleurs spécifiques* $\frac{C}{c}$ *est le même*. C'est le cas des gaz parfaits simples ou des gaz composés formés avec le même degré de condensation. De tels gaz sont *physiquement semblables* au regard des modifications adiabatiques. En effet, $\frac{R}{\varpi_2 c_2} - 1 = \frac{R}{\varpi_1 c_1} - 1$, et l'on a

$$g_2\left(\frac{\beta}{\alpha^3}\rho, S\right) = \frac{A_2}{A_1}\frac{\varpi_1}{\varpi_2}\frac{e^{\frac{S}{c_2}}}{e^{\frac{S}{c_1}}}\left(\frac{\beta}{\alpha^3}\right)^{\frac{R}{\varpi_2 c_2}-1} g_1(\rho, S).$$

La condition (25) est donc vérifiée; la valeur de λ est

$$\frac{A_2}{A_1}\frac{\varpi_1}{\varpi_2} e^{S\left(\frac{1}{c_2}-\frac{1}{c_1}\right)}\left(\frac{\beta}{\alpha^3}\right)^{\frac{R}{\varpi_2 c_1}-1},$$

expression qui est constante puisque S l'est.

On peut donc appliquer le corollaire de Newton aux mouvements adiabatiques des gaz parfaits ayant même rapport des chaleurs spécifiques.

11. Il est intéressant de se reporter à la démonstration que donne Newton du théorème que nous venons de commenter. Nous supposerons, pour fixer les idées, qu'il s'agit de deux masses fluides indéfinies. Newton

considère les fluides comme formés de particules s'attirant suivant certaines forces. Quand il place les deux corps H_1 et H_2 dans les fluides 1 et 2, il est obligé, pour avoir deux systèmes semblables, de supposer les particules constitutives des fluides dans le même rapport de similitude que les deux corps H_1 et H_2. Si le corps H_2 change, Newton doit donc changer corrélativement la *nature* du fluide. Notre démonstration montre que ce n'est pas nécessaire, car il est loisible de considérer une même masse fluide *indéfinie* comme décomposée en éléments d'autant de façons qu'on veut, et l'on peut choisir ces modes de décomposition de manière que les volumes des éléments de l'une soient à ceux de l'autre dans un rapport arbitraire. Ajoutons enfin que l'intervention de la Thermodynamique permet de sortir du domaine abstrait et de montrer que le résultat de Newton peut s'appliquer aux fluides naturels voisins de l'état parfait.

Intervention de la conductibilité. — 12. Nous allons supposer maintenant que la relation supplémentaire n'a pas la forme simple étudiée jusqu'ici, mais bien qu'elle exprime que la chaleur se propage dans le fluide par la seule conductibilité. Elle prend alors la forme

$$\begin{aligned} k(\rho, T)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial k}{\partial T}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right] \\ + \frac{\partial k}{\partial \rho}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial z}\right) \\ + T\rho\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}u + \frac{\partial T}{\partial y}v + \frac{\partial T}{\partial z}w + \frac{\partial T}{\partial t}\right) \\ - T\rho^2\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \rho\, \partial T}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \end{aligned}$$

k est le coefficient de conductibilité du fluide. C'est en général une fonction de ρ et de T. Nous supposerons toutefois qu'il est constant pour un même fluide. C'est là une hypothèse qui n'a aucun sens physique ; son but unique est de simplifier les raisonnements. La relation supplémentaire

... se réduit alors à

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+T\rho\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}u+\frac{\partial T}{\partial y}v+\frac{\partial T}{\partial z}w+\frac{\partial T}{\partial t}\right)$$
$$-T\rho^2\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \rho\,\partial T}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0.$$

Elle remplace (22). D'ailleurs (20) et (21) subsistent, et dans l'équation (20) il convient de faire $\Phi=\mathcal{F}$.

Restreignons ici la définition des fluides *physiquement semblables*. Nous dirons que 2 est physiquement semblable à 1 si

$$\mathcal{F}_2\left(\frac{\beta}{\alpha^3}\rho,\theta T\right)=\lambda\frac{\beta}{\alpha^3}\mathcal{F}_1(\rho,T),\tag{28}$$

α, β, θ, λ étant des *constantes* dont les trois premières sont *arbitraires*. Il est facile de voir que les *gaz parfaits ayant même rapport des chaleurs spécifiques* sont physiquement semblables au sens de cette nouvelle définition. En effet, pour un gaz parfait,

$$\mathcal{F}=c\mathrm{T}-c\mathrm{T}\,\mathrm{Log}\,\mathrm{T}+\frac{\mathrm{RT}}{\varpi}\mathrm{Log}\,\rho.$$

Donc

$$\mathcal{F}_2\left(\frac{\beta}{\alpha^3}\rho,\theta T\right)$$
$$=c_2\theta T-c_2\theta T\,\mathrm{Log}\,T+\frac{R\theta T}{\varpi_2}\mathrm{Log}\,\rho-c_2\theta T\,\mathrm{Log}\,\theta+\frac{R\theta T}{\varpi_2}\mathrm{Log}\frac{\beta}{\alpha^3}.$$

Comme $\mathcal{F}$ n'est défini qu'à une fonction linéaire près de la température, on peut écrire

$$\mathcal{F}_2\left(\frac{\beta}{\alpha^3}\rho,\theta T\right)=c_2\theta T-c_2\theta T\,\mathrm{Log}\,T+\frac{R\theta T}{\varpi_2}\mathrm{Log}\,\rho.\tag{29}$$

Si le gaz 2 et le gaz 1 ont même rapport $\frac{C}{c}$, ils ont aussi même produit ϖc. Dès lors on a

$$\mathcal{F}_2\left(\frac{\beta}{\alpha^3}\rho,\theta T\right)=\frac{1}{\varpi_2}(\varpi_1c_1\theta T-\varpi_1c_1\theta T\,\mathrm{Log}\,T+R\theta T\,\mathrm{Log}\,\rho)=\frac{\varpi_1}{\varpi_2}\theta\mathcal{F}_1(\rho,T).$$

La condition (28) est donc vérifiée, la valeur de λ étant $\frac{\alpha^3}{\beta}\frac{\varpi_1}{\varpi_2}\theta$.

La condition (28) est d'ailleurs évidemment plus restrictive que (25), car celle-ci se déduit de celle-là.

13. Ces principes posés, prenons deux fluides physiquement semblables au sens de notre définition nouvelle, et supposons leurs coefficients de conductibilité, censés constants, dans le rapport η.

Les fonctions ρ, u, v, w, T de x, y, z, t étant solutions de (20), (21), (27), il est évident que les fonctions $\frac{\beta}{\alpha^3}\rho$, $\frac{\alpha}{\varepsilon}u$, $\frac{\alpha}{\varepsilon}v$, $\frac{\alpha}{\varepsilon}w$, θT de αx, αy, αz, εt sont aussi solutions de ces équations pourvu que

$$\eta = \frac{\lambda\beta^2}{\alpha^4\varepsilon\theta}, \tag{30}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{\alpha^5}{\beta\lambda}. \tag{31}$$

La combinaison de ces deux conditions exige que

$$\eta = \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}\beta^{\frac{5}{2}}}{\alpha^{\frac{13}{2}}\theta}. \tag{32}$$

Ainsi considérons, pour fluides 1 et 2, deux fluides *identiques au point de vue potentiel interne mais non en ce qui concerne les coefficients de conductibilité*. Ces deux fluides sont pris dans le même état initial de densité et de température et nous faisons mouvoir dans l'un le corps H_1, dans l'autre le corps H_2 de diamètre α fois plus grand. Nous avons deux systèmes semblables avec $\theta = 1$, $\frac{\beta}{\alpha^3} = 1$, $\lambda = 1$. Par suite les relations (31) et (32) deviennent

$$\varepsilon = \alpha, \qquad \eta = \alpha.$$

Il faudrait donc, pour que les mouvements fussent semblables, que les coefficients de conductibilité fussent dans le même rapport que les dimensions linéaires des corps H_1 et H_2. Dans la réalité, pour que les deux

masses 1 et 2 soient identiques au point de vue potentiel interne, il est nécessaire qu'elles soient formées par le même fluide et dès lors les coefficients de conductibilité sont égaux et ne peuvent être dans le rapport α, à moins d'être nuls ou infinis. Par conséquent les mouvements provoqués dans un même fluide par des corps inégaux H_1 et H_2 ne peuvent être semblables que s'ils sont adiabatiques ou isothermes.

III.

Intervention de la viscosité. — **14**. Nous avons admis jusqu'ici qu'il n'y avait aucune viscosité dans les fluides. Il faut bien faire intervenir ce phénomène si l'on veut rapprocher suffisamment l'Hydrodynamique de la réalité.

Nous nous bornerons, pour simplifier, à l'étude du mouvement des *fluides incompressibles*. Le travail virtuel des actions de viscosité est

$$\delta f = \mathbf{S}\left[\nu_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \nu_z \frac{\partial \delta z}{\partial z} + \tau_x\left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y}\right) + \tau_y\left(\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z}\right) + \tau_z\left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)\right]\frac{Dm}{\rho},$$

avec

$$\nu_x = -2\mu(T)\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \nu_y = -2\mu(T)\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \nu_z = -2\mu(T)\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\tau_x = -\mu(T)\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \qquad \tau_y = -\mu(T)\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \qquad \tau_z = -\mu(T)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Le *coefficient de viscosité* $\mu(T)$ est une fonction de la température.

L'équation (20) s'écrit, *en supposant nuls* X, Y, Z,

$$(33) \qquad -\delta f + \mathbf{S}(j_x \delta x + j_y \delta y + j_z \delta z)\,Dm - \sum (P_x \delta x + P_y \delta y + P_z \delta z)\,d\Sigma = 0.$$

Toutefois cette équation ne doit pas être vérifiée pour des δx, δy, δz

quelconques, mais bien pour des δx, δy, δz respectant l'incompressibilité du fluide, c'est-à-dire vérifiant

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0. \tag{34}$$

Il convient de se rappeler d'ailleurs que ρ est maintenant une constante, ce qui réduit (21) à

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Soient deux systèmes fluides, l'un formé d'un fluide 1, l'autre d'un fluide 2, géométriquement semblables, α le rapport des longueurs, β celui des masses, défini par celui des densités $\frac{\beta}{\alpha^3}$. Laissons toujours de côté les intégrales de surface dans (33).

Supposons d'abord les mouvements *isothermes*. Les coefficients de viscosité μ sont alors constants. Soit τ leur rapport. Les travaux virtuels de la viscosité sont dans le rapport $\frac{\tau\alpha^3}{\varepsilon}$. *Les mouvements seront semblables avec la condition*

$$\varepsilon = \frac{\beta}{\alpha\tau}. \tag{35}$$

Supposons au contraire les mouvements *adiabatiques;* dans ce cas $-\mathrm{T}\,d\mathrm{S}$ est égal au travail réel de la viscosité; cela peut s'écrire, puisque le fluide est incompressible et n'a qu'un seul coefficient calorifique, sa chaleur spécifique $c(\mathrm{T})$:

$$\begin{aligned} -c(\mathrm{T})\,d\mathrm{T} = \frac{1}{\rho}\Big[& \nu_x \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial v}{\partial y} + \nu_z \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_x\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ & + \tau_y\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \tau_z\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big] dt. \end{aligned} \tag{36}$$

Nous sommes ici obligés de supposer que

$$\left\{ \begin{aligned} c_2(\theta \mathrm{T}) &= \sigma c_1(\mathrm{T}), \\ \mu_2(\theta \mathrm{T}) &= \tau \mu_1(\mathrm{T}). \end{aligned} \right. \tag{37}$$

Si ces conditions sont remplies, les équations (33), (34), (36) ***mon-trent** que les mouvements sont semblables* avec les **conditions**

$$\varepsilon = \frac{\beta}{\alpha\tau}, \tag{35}$$

$$\theta = \frac{\alpha^3\tau}{\beta\sigma\varepsilon} = \frac{\alpha^4\tau^2}{\beta^2\sigma}. \tag{38}$$

On remarquera que la température de 1 dans l'état initial étant choisie, la température de 2 dans le même état *ne peut pas être prise arbitrairement;* elle est déterminée par l'équation (38).

Malheureusement, il n'y a aucune espèce de raison pour que les relations (37) soient vraies. On peut donc dire que les mouvements adiabatiques de deux liquides visqueux ne sont pas semblables.

Les problèmes de l'Hydraulique pratique. — **15.** Ce qui précède suppose qu'il ne s'exerce aucune force X, Y, Z sur les liquides visqueux. Or, si l'on veut appliquer la théorie de la similitude aux problèmes de l'Hydraulique pratique, il faut considérer que les fluides sont pesants. L'axe des z étant pris en sens inverse de la pesanteur, il faut compléter (33) et l'écrire

$$\begin{aligned} -\delta f + \mathsf{S}(j_x\,\delta x + j_y\,\delta y + j_z\,\delta y)\, Dm \\ + \mathsf{S}\, g\,\delta z\, Dm - \sum (P_x\,\delta x + P_y\,\delta y + P_z\,\delta z)\, d\Sigma = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Il convient de remarquer que tout système étudié en Hydraulique pratique est une masse limitée par une surface fermée en tous les points de laquelle s'exerce la pression atmosphérique. Ce n'est pas que le liquide soit toujours en contact direct avec l'atmosphère; en bien des points il touche des parois solides. Mais il est commode alors de comprendre ces parois solides dans le système étudié de manière à envisager un système mixte formé de liquides et de solides, soumis en tous les points de sa

surface à la pression atmosphérique [1]. Prenons, dans (39), des δ compatibles avec les liaisons; le terme $\sum (P_x \delta x + \ldots) d\Sigma$ représente alors le travail virtuel de la pression atmosphérique, qui est nul pour un système formé de liquides et de solides, ayant donc un volume constant; par suite ce terme disparaît de (39) et il n'y a plus à s'en occuper.

On remarquera que, lorsqu'on considère ainsi un système mixte, s'il y a du frottement entre le liquide et les parois solides, son travail doit figurer dans le terme δf.

Soient donc deux systèmes géométriquement semblables. Les travaux virtuels de la pesanteur sont dans le rapport $\alpha\beta$, et s'il y a similitude mécanique elle sera définie par

$$\varepsilon = \alpha^{\frac{1}{2}}. \tag{40}$$

Mais pour que cela soit il faut que le rapport $\alpha\beta$ soit le même que le rapport $\frac{\tau\alpha^3}{\varepsilon}$ des travaux virtuels de la viscosité. Il faut donc que

$$\alpha\beta = \frac{\tau\alpha^3}{\varepsilon},$$

c'est-à-dire, vu (40), que

$$\tau = \frac{\beta}{\alpha^{\frac{3}{2}}}. \tag{41}$$

Or, *il n'y a aucune espèce de raison pour que* (41) *soit vérifié.* L'Hydraulique appliquée considère en général le même fluide, l'eau, placé dans des conditions variables, par exemple faisant tourner des turbines semblables. Dans ses problèmes donc, $\frac{\beta}{\alpha^3} = 1$, $\tau = 1$, $\alpha \neq 1$. Or, ces conditions sont incompatibles avec (41).

---

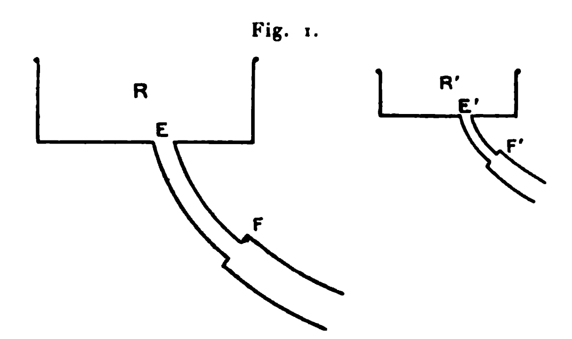
[1] Il ne peut y avoir de difficulté que pour certains points de la surface en contact avec le sol. Mais ces points sont généralement fixes, de sorte qu'on peut y supposer appliquée la pression atmosphérique.

Rigoureusement donc, la théorie de la similitude est irrecevable dans la plupart des questions de l'Hydraulique appliquée.

Prenons par exemple le problème suivant :

Deux réservoirs R *et* R′ *sont munis de tuyaux de vidange avec des rétrécissements brusques* E *et* E′ *à l'origine et des élargissements brusques* F *et* F′. *Les figures géométriques des réservoirs et des conduites sont semblables. Comparer les vitesses d'écoulement de l'eau dans les deux cas.*

Fig. 1.



Rigoureusement ce problème est insoluble par le principe de Newton, parce que la viscosité intervient dans la traversée des rétrécissements et des élargissements brusques et que ses travaux virtuels ne sont pas dans le même rapport que ceux de la pesanteur. Il est donc impossible d'affirmer que les mouvements de l'eau dans les deux tuyaux seront semblables, que les manières dont les veines s'épanouiront en F et en F′ seront semblables.

16. Mais nous allons faire voir que, par suite de circonstances curieuses, on peut avoir recours à la théorie de la similitude pour résoudre d'une *manière approximative* les problèmes d'Hydraulique pratique [1].

---

[1] On remarquera qu'en prenant ces problèmes comme nous allons le faire (articles **16** à **21**) il devient indifférent que les mouvements soient isothermes ou adiabatiques, ou même qu'ils suivent au point de vue calorifique n'importe quelle loi.

Dans ces problèmes, les seuls phénomènes où il y ait à tenir compte de la viscosité et des frottements sont ceux qui se rapportent :

1° Aux élargissements et rétrécissements brusques;
2° Au frottement contre les parois;
3° Au choc des veines fluides contre les solides.

17. Dans les élargissements et rétrécissements brusques, la *perte de charge* provoquée par la viscosité se calcule *approximativement* au moyen du théorème de Borda-Bélanger. Or ce théorème présente un caractère que l'on rencontre d'ailleurs dans diverses questions de Mécanique (théorème de Lazare Carnot sur le choc, théorie du laminage des gaz à travers un orifice étroit, loi adiabatique d'Hugoniot pour les ondes de choc, etc.) : la perte de charge, effet de la viscosité, s'y calcule par l'application d'un principe de Mécanique qui élimine précisément les actions de viscosité, dans l'espèce par le théorème des quantités de mouvement projetées. La connaissance de la viscosité est donc inutile pour calculer son effet. Ce résultat serait paradoxal et même absurde si l'on ne remarquait que la connaissance de la viscosité est remplacée, dans la démonstration, par certaines *hypothèses simples* sur la manière dont se fait le mouvement.

Ce sont ces hypothèses qui se trouvent équivaloir à un renseignement donné sur la viscosité. Elles sont ici au nombre de deux :

1° On admet que, à une certaine distance avant et après un élargissement brusque de conduite, l'écoulement se fait par tranches.

2° On admet que, dans la région de l'élargissement brusque, la paroi est baignée par de l'eau suffisamment morte pour qu'on puisse considérer que les pressions qu'elle supporte se répartissent comme en Hydrostatique.

Dans le théorème de Lazare Carnot sur le choc des solides, qui présente la plus grande analogie avec le principe de Borda-Bélanger, on apprend que le travail des actions de viscosité pour deux corps mous qui

se choquent est égal à la force vive due aux vitesses perdues. Ici l'*hypothèse simple* qui remplace la connaissance de la viscosité est celle que les liaisons introduites pendant le choc subsistent après le choc.

Il faut insister maintenant sur un caractère important que présentent ces hypothèses simples remplaçant la connaissance de la viscosité. Nous le ferons en raisonnant sur le problème défini à la fin de l'article 15.

Les masses fluides étudiées dans ce problème se divisent chacune en deux parties. Dans la première partie, comprenant tout ce qui est en dehors des rétrécissements et élargissements brusques E et F, la viscosité n'intervient pas ; l'équation (39) convient sans le terme δf. S'il n'y avait que cette partie, la similitude des deux écoulements serait assurée conformément à la formule (40)

$$\varepsilon = \alpha^{\frac{1}{2}}.$$

La seconde partie est formée par les régions autour de E et de F. Le travail de la viscosité y est sensible. L'équation (39) n'y est applicable qu'avec le terme δf. Mais nous ne cherchons pas à étudier comment se fait, *dans le détail,* le mouvement dans ces régions. Considérons-les comme d'étendue négligeable par rapport au reste du système; dès lors elles sont intéressantes, non par la forme qu'affectent les trajectoires dans leur intérieur, mais seulement par les modifications que leur présence apporte dans le mouvement en dehors d'elles. Dans ces conditions, le théorème de Bélanger montre que, pour déterminer complètement la loi de l'écoulement dans le tuyau, il n'est pas nécessaire d'appliquer aux régions E et F l'équation (39) dans toute sa généralité, en prenant tous les δ possibles; il suffit de prendre un des théorèmes qui se déduisent de (39), et *précisément un de ceux qui éliminent* δf, et de le compléter par des *hypothèses simples* QUI SONT PARFAITEMENT COMPATIBLES AVEC LA SIMILITUDE DÉFINIE PAR $\varepsilon = \alpha^{\frac{1}{2}}$. Dès lors, puisque δf est éliminé, la viscosité n'est plus gênante, et l'on peut considérer que les mouvements de l'eau dans les deux tuyaux sont semblables conformément à la

loi (40)

$$\varepsilon = \alpha^{\frac{1}{2}}.$$

Mais cette similitude ne se poursuit pas dans le détail. Le détail des élargissements ou rétrécissements n'est pas semblable.

On voit, en résumé, que la théorie adoptée en Hydraulique appliquée pour traiter des élargissements brusques vérifie une condition importante que l'on peut énoncer ainsi :

Dans les mouvements où la viscosité joue un rôle, on peut calculer approximativement tout ce qu'il importe de connaître de son action sans rien savoir de la forme de cette viscosité, en employant des théorèmes qui l'éliminent et en les complétant par certaines hypothèses simples, compatibles avec la similitude telle qu'elle serait définie si la viscosité n'existait pas.

Lorsque cette condition est remplie, on peut négliger la viscosité dans l'application du principe de Newton-Bertrand.

18. Parlons maintenant du frottement contre les parois.

Il intervient dans les écoulements non seulement parce qu'il introduit une résistance au mouvement des filets fluides en contact avec la paroi, mais encore parce que, retardant les filets périphériques par rapport aux filets centraux, il introduit dans la masse en mouvement des inégalités de vitesse qui font jouer la viscosité.

L'Hydraulique pratique se contente, en général, de l'approximation suivante. Elle imagine un écoulement par tranches et une force résistante appliquée à la périphérie. Le travail virtuel de cette force doit être ajouté au premier membre de l'équation (39). La similitude, si elle existe, ne peut être que conforme à la formule (40), qui est commandée par l'intervention de la pesanteur. Mais, pour qu'elle existe, il faut que, quand on passe d'un système à un autre, le travail virtuel de la force de frottement soit multiplié par $\alpha\beta$, comme celui de la pesanteur.

Or l'expérience montre que la force de frottement qui s'exerce sur la masse Dm comprise entre deux sections normales d'un tuyau est *à peu près* de la forme

$$(42) \qquad \mathrm{D}m\frac{\chi}{\omega}\mathrm{B}\mathrm{V}^2,$$

χ périmètre mouillé, ω section débitante, V vitesse des tranches, B constante. Quand on passe d'un système à l'autre, le travail virtuel d'une telle force est multiplié par $\beta\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2}$. Il faut que

$$\frac{\beta\alpha^2}{\varepsilon^2} = \alpha\beta,$$

condition qui est précisément assurée avec la condition de similitude (40)

$$\varepsilon = \alpha^{\frac{1}{2}}.$$

Donc les forces de frottement, quand on s'en tient à l'approximation ci-dessus, ne troublent pas la similitude (40).

Il n'est pas mauvais de remarquer que déjà avec l'approximation donnée par la formule de Darcy, supérieure à celle de la formule (42), la similitude est altérée. On remarquera encore qu'elle l'est également si l'on admet une perte de charge proportionnelle à la vitesse, comme cela a lieu dans les écoulements à faible vitesse (expériences de Poiseuille).

19. Restent les phénomènes de choc.

Dans le choc des veines fluides contre les solides, il y a certainement un effet sensible de la viscosité, mais il est excessivement difficile de dire quel il est. Ici, nous sortons tout à fait du domaine de la rigueur. Toutefois, voici ce que nous pouvons dire pour justifier l'intervention du principe de similitude, même quand il se présente de tels chocs.

En général, la viscosité de l'eau mise en jeu par ces chocs n'intervient, dans la manière dont se fait *en gros* l'écoulement, que par son *travail*

réel. On peut, se laissant guider par le théorème de Lazare Carnot sur le choc des corps mous, admettre à titre d'approximation que ce travail, pour une masse unité, est une fraction bien déterminée du carré de la vitesse relative W de la veine fluide par rapport au solide. Pour la masse Dm il est donc

$$\mathrm{D}mr\mathrm{W}^2,$$

la fraction r restant la même quand le choc se fait dans des conditions semblables. Si l'on admet cette grossière hypothèse, on voit que, lorsqu'on passe d'un système à un autre α fois plus grand, ce travail est multiplié par $\beta\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2}$, tandis que celui de la pesanteur l'est par $\alpha\beta$. L'égalité de ces deux facteurs est compatible avec la similitude définie par (40).

Nous n'avons pas besoin d'insister sur le caractère essentiellement grossier de ces considérations.

20. Nous allons étudier un peu différemment les circonstances qui se présentent dans les problèmes de l'Hydraulique pratique.

On sait comment M. Boussinesq traite ces problèmes [1]. Il applique les équations de l'Hydrodynamique, dans l'espèce (21) et (39), aux *vitesses moyennes locales* et augmente fictivement le coefficient μ de viscosité pour tenir compte de l'*agitation tourbillonnaire ;* il ajoute ainsi à la viscosité vraie du fluide une viscosité apparente qui est d'ailleurs très supérieure à la première, puisqu'elle peut être 5000 fois plus forte. Le coefficient de viscosité introduit dans (39) n'est plus alors une constante caractéristique du fluide; il dépend de la dimension de la section d'écoulement et de la vitesse à la paroi. La loi adoptée par M. Boussinesq pour cette dépendance est telle que, si l'on passe d'un système à un autre, le rapport τ des coefficients de viscosité est égal [2] à $\frac{\alpha^2}{\varepsilon}$. Dès lors, dans les pro-

(1) Boussinesq, *Essai sur la théorie des eaux courantes,* 1878 (Extrait des *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences,* t. XXIII et XXIV). Notre coefficient μ est appelé ε par M. Boussinesq.

(2) Boussinesq, *loc. cit.,* p. 51.

blèmes relatifs à l'eau, on a $\frac{\beta}{\alpha^3} = 1$, $\tau = \frac{\alpha^2}{\varepsilon}$, ce qui est parfaitement compatible avec (40) et (41). Donc, dans l'approximation de M. Boussinesq, la loi de la similitude s'applique aux problèmes de l'Hydraulique pratique.

Il faut dire, il est vrai, que, pour déterminer la forme du coefficient de viscosité, M. Boussinesq admet déjà que, « dans des sections semblables, l'agitation tourbillonnaire doit se répartir semblablement aux points homologues (¹) ». Mais on peut aussi prendre la loi des coefficients de viscosité de M. Boussinesq comme vérifiée par l'expérience et indépendante de la manière dont elle a été obtenue et chercher les conséquences qui en découlent; la propriété que nous venons d'énoncer est alors une conséquence de cette forme, au lieu d'en être la raison.

Il est d'ailleurs bien certain que cette propriété ne saurait être parfaitement exacte; cela résulte de l'article **15** où nous avons vu que, si l'on s'appliquait à la solution rigoureuse d'un problème d'Hydraulique, en envisageant les vitesses vraies au lieu des vitesses moyennes locales et la viscosité réelle de l'eau au lieu de la fictive, on ne retrouvait pas la loi de la similitude. Mais l'accord que M. Boussinesq a obtenu entre l'expérience et ses calculs basés sur ladite propriété autorise à penser qu'elle est approximativement vraie. On peut d'ailleurs s'expliquer grossièrement la chose par les considérations suivantes.

Considérons un problème où les variations de vitesse soient assez faibles pour que la viscosité *réelle* de l'eau, très petite quand cette condition est remplie, soit négligeable. Si nous traitons ce problème en nous attachant aux vitesses vraies, nous pouvons dire que ces vitesses se répartissent sensiblement comme si la seule force existante était la pesanteur et, par suite, que les agitations tourbillonnaires suivent la loi de la similitude. Si, maintenant, nous voulons traiter le même problème avec l'approximation de M. Boussinesq en envisageant les vitesses moyennes locales, il faut remplacer la viscosité vraie par une viscosité fictive dont le coefficient,

(¹) Boussinesq, *loc. cit.*, p. 51.

puisqu'il dépend de l'agitation tourbillonnaire, doit suivre aussi la loi de la similitude, donc vérifier la relation $\tau = \frac{\alpha^2}{\varepsilon}$.

Les problèmes où les variations de vitesse sont trop fortes pour que la viscosité réelle de l'eau soit négligeable échappent, bien entendu, à ce raisonnement. Il faut alors, dans l'approximation de M. Boussinesq comme plus haut, invoquer les considérations de l'article **17**.

Pour ce qui est du frottement contre les parois, M. Boussinesq admet la proportionnalité au carré de la vitesse, comme à l'article **18**.

21. Après la discussion qui précède, nous pouvons aborder la démonstration du théorème suivant, qui remonte à Combes et qui joue aujourd'hui, depuis les travaux de M. Rateau, un rôle important dans la théorie des turbines :

Si deux turbines semblables se meuvent avec des vitesses angulaires réciproquement proportionnelles à la racine carrée de leurs dimensions linéaires, les hauteurs de chute étant proportionnelles à ces mêmes dimensions, elles utilisent la même fraction du travail dépensé.

Voici, avec quelques modifications dans la forme, la démonstration que donne Bertrand de cette proposition.

Considérons le système matériel formé par la réunion de la turbine et de l'eau qui la remplit, celle-ci étant limitée à l'amont par une section, supposée très grande, du bief supérieur et à l'aval à la sortie de la turbine. Comme nous avons deux turbines, nous avons deux systèmes matériels géométriquement semblables ; le rapport des longueurs est α. Ne faisons encore aucune hypothèse sur la loi de leur mouvement. Les résistances à vaincre seront censées être, pour fixer les idées, des forces R et R′ appliquées par des courroies à la jante de deux roues semblables montées sur les axes des turbines. Les forces de la pesanteur sont, d'un système à l'autre, dans le rapport α^3, leurs travaux virtuels dans le rapport α^4. Pour qu'il y ait similitude, il faut que les résistances R et R′ soient aussi dans

le rapport α^2. *Il n'y a pas d'autres actions agissant sur le système.* Si donc R et R′ sont ainsi que nous venons de dire, les mouvements seront en effet semblables avec la condition (40)

$$\varepsilon = \alpha^{\frac{1}{2}},$$

et les vitesses angulaires sont bien, comme il est dit dans l'énoncé, dans le rapport inverse des racines carrées des dimensions linéaires. Les travaux résistants surmontés dans l'unité de temps seront dans le rapport $\frac{\alpha^3}{\varepsilon}$. Or les quantités d'eau dépensées dans l'unité de temps seront en raison composée des surfaces et des vitesses, soit dans le rapport $\frac{\alpha^2}{\varepsilon}$, et, comme elles tombent de hauteurs dont le rapport est α, les travaux moteurs seront dans le rapport $\frac{\alpha^3}{\varepsilon}$, comme les travaux recueillis. Les rendements seront donc les mêmes.

Nous avons souligné, dans la démonstration qui précède, une phrase qui n'est pas exacte et dont la présence, par conséquent, fausse tout le raisonnement. Il y a d'autres actions que la pesanteur et la résistance R agissant sur le système. Nous ne parlons pas des actions de liaison qui, en effet, ne sont pas à considérer, car elles n'entrent pas dans l'équation générale de la Thermodynamique. Mais il y a le frottement et la viscosité; il y a, dans (39), un terme en δf. Le négliger, comme fait Bertrand, revient à admettre que la seule perte qui se produise dans les turbines est la perte par *vitesse restante à la sortie*.

Or cela est faux. Il y a dans les turbines des pertes par choc des veines fluides à l'entrée dans la couronne mobile, par élargissements brusques, par frottement contre les parois. Il y aussi les pertes qu'on appelle en général *externes* : le frottement de l'arbre dans ses coussinets, le frottement de la couronne mobile contre le fluide ambiant, la fuite au joint. Le raisonnement de Bertrand ne tient pas compte de toutes ces circonstances; aussi ne peut-il pas être considéré comme probant.

Mais il peut être corrigé. Laissons, en effet, de côté les pertes dites *externes* et bornons-nous aux autres que nous avons énumérées ci-dessus.

La discussion des articles **16**, **17**, **18**, **19**, **20** montre que, pourvu que nous admettions les hypothèses généralement reçues en Hydraulique pratique, ces autres ne troublent pas la similitude. La légitimité de la conclusion de Bertrand est ainsi rétablie, à condition toutefois que l'on considère le travail perdu par les pertes externes comme faisant partie du travail utilisé; en d'autres termes, l'égalité des rendements des deux turbines est démontrée, grâce à notre discussion des articles **16** à **20**, non pour les rendements totaux, mais pour ceux qu'on qualifie d'*hydrauliques*. Rappelons que l'on désigne habituellement par *rendement hydraulique* d'une turbine le rapport au travail dépensé de la somme du travail utilement produit et du travail absorbé par les pertes externes.

On peut remarquer en terminant que le théorème ne s'applique pas uniquement aux turbines, *qu'il est vrai pour deux machines hydrauliques quelconques*.

La résistance des fluides. — 22. Newton a essayé d'utiliser la théorie de la similitude dans l'étude de la résistance des fluides ([1]). Mais les résultats auxquels il est parvenu sur ce sujet doivent être discutés de très près.

Il part des hypothèses moléculaires. Il considère un fluide formé de particules n'exerçant les unes sur les autres que des actions au contact et montre que la résistance opposée par un tel fluide au mouvement d'un solide est proportionnelle au carré de la vitesse V de celui-ci. Puis, par une comparaison ingénieuse, il étend ce résultat à la résistance opposée par un fluide quelconque à un solide qui se meut avec une vitesse très grande.

Essayons de transposer les démonstrations de Newton de manière à nous affranchir des hypothèses sur la constitution des fluides. On peut, pour les fluides incompressibles, reprendre le raisonnement de Newton relatif au milieu formé de particules n'agissant qu'au contact. Le fluide incom-

---

([1]) NEWTON, *loc. cit.*, corollaire 3 de la proposition XXXII du Livre II.

pressible, il est vrai, ne correspond qu'imparfaitement à ce milieu. Il serait plus logique d'envisager un fluide pour lequel $2\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + \rho\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2}$, c'est-à-dire $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial\rho}$ (p désigne la pression) serait nul. Mais comme un tel fluide ne correspond à aucune réalité physique, nous ne le considérerons pas; nous appliquerons la méthode de Newton à un fluide incompressible, suivant ainsi la voie ouverte par Reech qui a cherché à déterminer, par le principe de la similitude, la forme de la loi de la résistance que l'eau oppose à la marche des navires (¹).

Soit donc une masse indéfinie d'un fluide incompressible *non visqueux* qui n'est soumis à l'action d'aucune force $\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$. Dans une première expérience, faisons-y mouvoir un corps H_1 avec une vitesse V_1. Dans une seconde expérience, donnons au même corps H_1 une vitesse V_2. Il faut se reporter à l'équation (33) et y faire $\delta f = 0$. Le corps H_1 étant considéré comme *en dehors* du système matériel étudié, le terme

$$\sum (P_x\,\delta x + P_y\,\delta y + P_z\,\delta z)\,d\Sigma$$

est relatif aux pressions que H_1 exerce sur le fluide; on peut l'éliminer par un choix convenable des δ et (33) détermine alors le mouvement du fluide; on peut, au contraire, le laisser subsister, et (33) peut alors servir à calculer P_x, P_y, P_z. Les deux systèmes constitués par les deux expériences ci-dessus sont semblables avec $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\varepsilon = \frac{V_1}{V_2}$. Le calcul des forces $P_x\,d\Sigma$, $P_y\,d\Sigma$, $P_z\,d\Sigma$ par (33) montre qu'elles sont dans le rapport $\frac{1}{\varepsilon^2}$, soit $\frac{V_2^2}{V_1^2}$. Si donc ces forces ont une résultante, laquelle constitue, au signe près, la *résistance du fluide*, celle-ci varie comme le carré de la vitesse (²).

(¹) REECH. *loc cit.*, 1852, p. 272.

(²) Un raisonnement tout semblable, conduit en considérant deux fluides de densités différentes, montrerait que la résistance est proportionnelle à la densité du fluide. La discussion que nous allons faire de la loi du carré de la vitesse s'applique naturellement à cette seconde partie du théorème.

Mais, pour que cette conclusion ne soit pas illusoire, il faut que ladite résultante existe et ne soit pas nulle. C'est ce qui arrive dans certains cas, étudiés pour la première fois par Kirchhoff [1] et où, en effet, on trouve bien la loi du carré de la vitesse. Mais ces cas sont caractérisés par le partage de la masse fluide, au moyen de surfaces de glissement, en parties immobiles et en parties animées de mouvement; ils présentent la plus grande analogie avec le problème du choc des veines liquides contre les solides, étudié par Lagrange, auquel, d'ailleurs, le raisonnement de Newton-Reech s'applique parfaitement. Il semble bien peu probable que, dans la réalité, lorsqu'un solide se déplace au sein d'un liquide, les choses se passent conformément aux hypothèses de Kirchhoff. Or, si l'on écarte l'existence de surfaces de glissement et si l'on suppose tous les éléments fluides soudés entre eux, on trouve une valeur nulle pour la résistance d'un fluide incompressible non visqueux [2]; la démonstration de Newton-Reech est alors illusoire.

Il est plus que probable que la résistance opposée au mouvement des corps solides par les liquides provient non pas de l'existence des surfaces de glissement de Kirchhoff, mais bien de la viscosité [3]. Or, si l'on veut faire intervenir la viscosité, l'application de la théorie de la similitude ne donne plus aucun résultat, car l'équation (35) montre que ε doit être égal à 1 si β, α et τ le sont. Les deux vitesses V_1 et V_2 des deux expériences ci-dessus ne peuvent être qu'égales et la démonstration tombe en défaut.

Les résultats de Newton et de Reech ne peuvent donc pas être adoptés

(1) *Mechanik*, XXIIe leçon.

(2) On trouvera une démonstration simple de ce résultat dans Poincaré, *Cinématique et mécanismes. Potentiel et Mécanique des fluides*, 1899, p. 372; dans *l'Hydraulique* de Flamant, 1891, p. 536, on en trouvera aussi une, beaucoup moins rigoureuse à la vérité, mais plus générale; elle s'applique, par exemple, au cas d'un corps partiellement immergé.

(3) En démontrant (*Leçons sur la propagation des ondes*, p. 355) que les surfaces de glissement ne peuvent pas prendre naissance dans un fluide, du moins dans les conditions où se place l'Hydrodynamique rationnelle, M. Hadamard a apporté un argument de plus en faveur de cette probabilité.

de plano. D'ailleurs, depuis Reech, on a renoncé à demander à la théorie de la similitude la forme de la loi suivant laquelle varie, avec la vitesse, la résistance des carènes. Dans les applications que l'on fait aujourd'hui de cette théorie à l'étude de cette résistance, on considère comme donnée par l'expérience la loi du carré de la vitesse ([1]).

Mais il nous semble qu'on peut corriger le raisonnement de Reech comme nous avons corrigé plus haut la démonstration donnée par Bertrand du théorème de Combes. Il suffit d'admettre que la condition énoncée à la fin de l'article **17** est réalisée. Or, il est probable qu'elle l'est grossièrement et que, dans les mouvements d'un solide au sein d'un liquide, la viscosité du liquide intervient un peu comme dans le phénomène de Borda-Bélanger, au moment où les veines fluides, déviées par le passage du corps solide, s'épanouissent pour se rejoindre ([2]). On peut dire aussi qu'une approximation analogue à celle de M. Boussinesq doit convenir à cette question. La loi du carré de la vitesse doit donc être vraie, mais d'une manière approximative seulement. C'est, en effet, ce que l'expérience confirme.

23. Venons maintenant aux fluides compressibles et voyons si l'on peut, à l'imitation de Newton, étudier par le principe de la similitude la résistance opposée aux corps qui s'y meuvent très vite. Cela nous paraît fort difficile. Il est probable, en effet, qu'un projectile se déplaçant dans l'air, par exemple, est précédé par une onde de choc. De là la mise en jeu d'un phénomène irréversible qui, comme la viscosité des fluides incompressibles, peut expliquer la résistance. Mais de là aussi une grande complication du problème. Le mouvement du gaz est adiabatique, mais l'entropie ne reste pas constante pour chaque élément de masse, car elle varie au passage de l'onde de choc; ajoutons qu'elle ne varie pas de la même quantité pour tous les éléments. Ces circonstances rendent très

---

([1]) *Voir* Pollard et Dudebout, *Théorie du navire*, t. III, 1892, p. 485.

([2]) *Voir* la théorie de Poncelet (Flamant, *Hydraulique*, 1891, p. 538).

difficile l'application de la théorie de la similitude à l'équation (20) dans ce problème particulier.

Il est important de remarquer que le théorème de Newton, commenté aux articles **9** à **11** du présent Mémoire, doit être, en vertu de ce que nous venons de dire, soumis à la restriction suivante : « Les mouvements qu'on étudie sont tels qu'il ne s'y produit pas d'onde de choc [1]. »

---

[1] Au moment où je termine la correction des épreuves, M. Duhem me signale un Mémoire d'Helmholtz que je ne connaissais pas : *Ueber ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend* (*Monatsberichte der k. Akademie zu Berlin*, 26 juin 1873). Je n'ai que le temps de réparer la négligence que j'ai commise en ne citant pas ce travail, qui, d'ailleurs, n'est pas identique au Mémoire qui précède, bien qu'il en contienne déjà quelques résultats.

SUR LA

THÉORIE DES DÉPLACEMENTS GAZEUX,

PAR M. ALBERT COLSON.

La Mécanique chimique, issue des recherches de Berthollet sur l'influence chimique de la solubilité et de la volatilité, est devenue une science rationnelle rattachée à la Thermodynamique par la dissociation et les données thermiques. Son rôle en Chimie devrait donc être comparable à celui que M. Henri Poincaré a si magistralement attribué aux Mathématiques à l'endroit de la Physique ([1]). Cependant la Mécanique chimique est encore peu goûtée des chimistes. Cela tient sans doute à la fécondité de la théorie des substitutions qui a ouvert aux chercheurs un champ illimité et relativement facile à exploiter, puisqu'il n'exige que des connaissances spéciales ; mais cela tient aussi à la difficulté de traduire expérimentalement les résultats du calcul quand on fait intervenir l'entropie et d'autres notions élevées.

Il est possible de trouver des règles simples et parfaitement rationnelles auxquelles obéissent certaines catégories de phénomènes chimiques. Je me propose ici d'établir celles qui sont relatives à la préparation des gaz. Dans ce but, je tenterai de réduire le nombre des conditions exprimées par la Mécanique générale en limitant les formules au cas spécial des préparations gazeuses.

Mais pour appliquer cette restriction aux cas où l'émission gazeuse est assimilable aux vapeurs saturées, je devrai surtout prouver expérimenta-

---

([1]) H. POINCARÉ, *La Science et l'Hypothèse.*

lement que toute catégorie d'émission gazeuse comporte de tels cas. Cette preuve faite, l'adaptation de l'équation de Clapeyron restreinte aux vapeurs saturées suffira pour indiquer les conditions théoriques de réversibilité et d'irréversibilité. Toutefois il existe une difficulté :

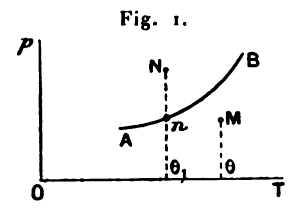
J. Moutier a montré le premier que la disssociation des systèmes assimilables aux vapeurs saturées est régie par l'équation de Clapeyron où Clausius a introduit l'équivalent mécanique 425 :

$$L = \frac{T}{425}(u' - u)\frac{dp}{dT},$$

L étant la chaleur de formation d'une molécule du composé, $(u' - u)$ la dilatation éprouvée par la molécule transformée en système gazeux, dp l'accroissement de la pression sous l'influence d'une variation de la température T à laquelle on opère.

Cette équation résume les conditions rationnelles de l'équilibre, puisqu'elle résulte à la fois de l'application du principe de l'équivalence et du principe de Carnot. Mais on ne doit pas oublier que, au sujet des équilibres formulés par cette équation, Moutier a fait une remarque fondamentale. Discutant les expériences de Debray sur la décomposition des carbonates de plomb et de magnésium qui ne semble pas limitée par la pression, Moutier a insisté sur la difficulté de mettre en évidence la réversibilité des réactions chimiques. En effet, si, dans

Fig. 1.



l'exemple classique des dissociations réversibles $CaCO^3$, on construit la courbe AB des tensions de dissociation, et si l'on suppose que les procédés d'expérimentation soient limités par des valeurs de la température et de la pression telles que le point figuratif se trouve toujours à droite de la

courbe AB, en M par exemple, on affirmera que *le gaz carbonique ne pourra se combiner à la chaux, la décomposition du carbonate de chaux n'étant pas limitée par la pression;* car, à la température figurée par la longueur $O\theta$ la pression $M\theta$ du gaz carbonique sera insuffisante pour provoquer la reconstitution du carbonate. Inversement, pour tout point figuratif N situé à gauche de AB, *la décomposition du carbonate ne sera pas possible,* puisque la pression $N\theta_1 > n\theta_1$ empêche toute dissociation [1].

C'est pour n'avoir pas tenu compte de cette remarque de Moutier que les chimistes ont persisté à considérer l'argent comme incapable de se combiner à l'oxygène, jusqu'au moment où M. Le Chatelier, opérant sous pression et sortant ainsi de la zone située à droite de la courbe de dissociation, obtint une combinaison réversible.

De même, comme je le prouverai plus loin, l'acide sulfurique décompose le chlorure d'argent quand on maintient la pression constante et qu'on élève progressivement la température de façon à amener le point figuratif analogue de N sur la courbe de dissociation AB.

Une discussion approfondie des conditions d'équilibre démontre que, si la remarque de Moutier est essentielle, elle n'est cependant pas toujours suffisante : nous le verrons aux pages 122-123 et 133-134.

Adaptation de la formule de Clapeyron.

L'équation de Clapeyron a la généralité des expressions mathématiques : elle s'applique à tous les changements d'état, volatilité, fusion, dissolution. Au contraire, les réactions hétérogènes qui résultent d'une émission gazeuse sont exclusivement assimilables aux vapeurs saturées. Il peut, dès lors, être utile d'introduire cette condition dans la formule de Clapeyron afin de circonscrire la discussion à la catégorie des émissions gazeuses. C'est ce que je vais faire :

---

[1] J. MOUTIER, *La Thermodynamique et ses applications*, p. 427; Gauthier-Villars, 1885.

Pour transformer un liquide ou un solide en gaz, il faut chauffer ou diminuer la pression. C'est une règle incontestée et tout aussi bien établie que la dilatation des gaz par la chaleur et leur contraction par la pression, observations qui ont conduit à la relation $PV = RT$, journellement employée en Physique. J'ajoute que cette règle découle de la théorie cinétique qui a été si utile aux chimistes et dont M. van't Hoff a tiré tant de belles conclusions. Mais, en dehors de cette théorie, aujourd'hui en défaveur, le principe de Watt relatif à la condensation des vapeurs sur une paroi froide permet d'adapter la formule de Clapeyron à la vaporisation exclusivement. Voici de quelle façon :

Si l'on n'admet pas que, pour vaporiser un corps, il est nécessaire de le chauffer; si, en d'autres termes, on n'admet pas que L est toujours positif dans le cas des vapeurs, on devra, en vertu du principe de Watt, considérer comme positif le rapport $\frac{dp}{dT}$; car, si le contact d'une paroi froide diminue la force élastique des vapeurs saturées, c'est que p varie dans le même sens que T, ce qui exige $\frac{dp}{dT} > 0$.

D'autre part, un liquide ou un solide ne peut se vaporiser que si l'on offre un supplément d'espace aux corps condensés, c'est dire qu'une vapeur en contact avec le liquide ou le solide générateur occupe, toutes choses égales, un volume supérieur à celui du liquide ou du solide. En d'autres termes, dans un corps en voie de volatilisation, $u' - u$ est positif.

Donc, dans l'équation $L = \frac{T}{425}(u' - u)\frac{dp}{dT}$ appliquée à la vaporisation, L est toujours positif, comme le produit des trois facteurs T, $(u' - u)$ et $\frac{dp}{dT}$ dont cette quantité dépend.

De là résulte qu'une réaction hétérogène réversible, limitée par une pression gazeuse, est non seulement régie par l'équation de Clapeyron, comme l'a indiqué Moutier, mais que, en outre, l'équilibre est assujetti aux conditions

$$L > 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dp}{dT} > 0.$$

Si l'une ou l'autre de ces conditions n'est pas remplie, la réaction cesse d'être réversible, et cette simple constatation dispense de recourir aux considérations basées sur l'entropie.

Quant à la double condition $L < 0$ et $\frac{dp}{dT} < 0$, elle est conforme à l'équation de Clapeyron, mais elle n'a aucun sens pratique dans le cas qui nous occupe, on vient de le voir. Donc :

Tout équilibre hétérogène sous la pression d'un gaz est impossible si ce gaz se fixe avec absorption de chaleur.

En d'autres termes :

Un gaz qui s'échappe d'une réaction isothermique avec dégagement de chaleur ne peut plus rentrer en combinaison.

Ainsi la décomposition des sulfures alcalins ou des carbonates par les acides fixes sera absolue parce que le départ des gaz CO^2 ou H^2S est toujours accompagné d'un dégagement de chaleur :

$$Na^2S + SO^4H^2 = SO^4Na^2 + H^2S + 49\,000^{cal},$$
$$CaCO^3 + SO^4H^2, H^2O = CaSO^4, 2H^2O + CO^2 + 15\,000^{cal}.$$

Nous verrons qu'un excès d'eau ne modifie pas l'allure du phénomène.

La condition $\frac{dp}{dT} > 0$ ne peut alors s'appliquer qu'aux gaz qui dégagent de la chaleur en se condensant, et elle s'exprime comme il suit :

Si, dans une condensation exothermique, une élévation de la température T *n'augmente pas la tension gazeuse, la condensation est totale à* T.

Cet énoncé est une forme de la remarque de Moutier, et la décomposition du sulfate d'argent par le gaz chlorhydrique en donne une représentation particulièrement intéressante.

J'ai constaté, en effet, que l'absorption du gaz HCl par ce sel est totale entre 0° et 150° et qu'elle est plus rapide à 120° qu'à zéro. Mais, s'il n'y a

pas de tension gazeuse et si la réaction est totale dans ces conditions, il n'en est plus de même à la température de 175°. Je l'ai vérifié en plaçant un morceau de potasse au voisinage du système $AgCl + SO^4H^2$: dans le vide, au bout de plusieurs heures, la potasse se ternit à 175° par suite de traces de chlorure de potassium. L'action inverse commence donc aux environs de 170°. Il en est de ce système comme du carbonate de chaux stable au-dessous de 400° et dont la dissociation ne commence qu'au-dessus de cette température [1].

Avant d'aborder la question des températures de réaction, je vais montrer toute la généralité des équilibres hétérogènes, et établir par des expériences irréfutables que ce genre d'équilibre s'étend des décompositions simples aux réactions les plus compliquées, en particulier aux lois de Berthollet. Ce rapprochement éclairera complètement ce sujet et en fera disparaître complètement les exceptions déconcertantes.

DÉCOMPOSITIONS SIMPLES.

La dissociation du carbonate de chaux est le premier exemple de dissociations hétérogènes. Il peut être utile de remarquer que la décomposition du calcaire n'est pas réversible quand on part du spath d'Islande; car la condensation du gaz carbonique par la chaux reproduit du carbonate amorphe et non du spath. On ne retrouve donc pas l'état initial. La loi des phases indique d'ailleurs qu'un tel système est bivariant.

La dissociation des hydrates salins, la décomposition des sels ammoniacaux (chlorure d'argent ammoniacal, chlorhydrates polyammoniés de M. Troost), la transformation du cyanogène en paracyanogène sont d'autres exemples de dissociations hétérogènes réversibles. Ajoutons les

[1] Il ne faut pas confondre la température de dissociation avec la température de combinaison : $Cu + O$ se combinent vers 150°, tandis que CuO ne se dissocie qu'au rouge.... Il existe donc, non pas une température, mais deux températures qui interviennent différemment dans les équilibres chimiques, comme je l'ai montré (*Cours de Chimie de l'École Polytechnique*, 1898-1899 et suivants).

polychlorhydrates d'alcaloïdes. J'ai montré, en effet, que les chlorhydrates d'alcaloïdes, tels que la pipéridine (cycle fermé) ou la dibutylamine (chaîne longue) sont capables d'absorber un excès de gaz chlorhydrique pour former des corps définis, cristallisés, qui, chauffés, émettent une tension de gaz HCl uniquement fonction de la température.

J'ai observé à 0° une tension mercurielle de 355^{mm} pour le bichlorhydrate de pipéridine et de 195^{mm} pour le bichlorhydrate d'isobutylamine; à 7°, ces tensions s'élèvent respectivement à 462^{mm} et à 253^{mm}.

L'importance de tels composés est particulièrement intéressante, car les prétendus phénomènes d'ionisation sur lesquels certains physico-chimistes se basent pour déterminer la *force* des alcalis, sont évidemment troublés par l'existence de composés définis tels que

$$AzH^4Cl, nAzH^3 \quad \text{ou} \quad AzR^4Cl, nHCl,$$

dont ces expérimentateurs ne tiennent aucun compte.

DOUBLES DÉCOMPOSITIONS : LOIS DE BERTHOLLET.

1° *Déplacement réciproque des acides.*

Enfin le déplacement des acides volatils par les acides fixes et le déplacement réciproque des bases, qui rentrent dans l'ordre important des phénomènes connus sous le nom de *lois de Berthollet*, présentent également des cas de réversibilité, monovariants, qui permettent d'élucider cette question difficile. A l'époque où j'ai commencé mes recherches sur ce sujet, l'action des acides sur les sels, c'est-à-dire la préparation des acides volatils, était si loin d'une explication rationnelle, qu'en Allemagne on restaurait les Tables d'affinité imaginées par Bergmann au XVIIIe siècle [1], tandis qu'en France un maître, qui a consacré aux questions physico-

[1] W. OSTWALD, *Abrégé de Chimie générale*, traduit par Charpy (p. 389 à 413). Carré, 1893.

chimiques son talent de professeur et d'expérimentateur, s'exprimait ainsi sur un cas particulier :

L'acide chlorhydrique gazeux est, à froid, sans action sur le sulfate de soude ; mais, au rouge vif, il le décompose intégralement, ce qui n'est pas conforme aux lois de Berthollet [1]....

Les Tables d'affinité n'ont rien de rationnel. Elles doivent être explicables par la Mécanique, mais elles ne peuvent dominer les sciences rationnelles. Les explications de M. Ditte ne sont guère plus admissibles ; car, d'une part, l'acide sulfurique chauffé au rouge vif est gazeux comme l'acide chlorhydrique ou même décomposé. Dès lors, l'antagonisme visé par Berthollet entre acide fixe et acide volatil cesse d'exister. D'autre part, l'acide chlorhydrique, *à froid,* loin d'être sans action sur le sulfate sodique, réagit au contraire complètement sur ce sel, comme le prouvent les expériences suivantes :

Ayant enfermé quelques grammes de sulfate sodique calciné SO^4Na^2 dans un tube sec purgé d'air par un courant de gaz chlorhydrique séché sur l'anhydride phosphorique, j'ai constaté que le tube, abandonné pendant 10 heures à la température de 10°, puis ouvert sur la cuve à mercure, était vide de gaz ; le mercure s'élevait au niveau du vide barométrique à 2^{mm} près. Le gaz chlorhydrique introduit au contact du sulfate sodique avait donc disparu. L'expérience ainsi faite est en contradiction avec les lois de Berthollet, l'acide fixe SO^4NaH ayant été déplacé par un acide volatil de même force HCl :

$$Na^2SO^4 + HCl = SO^4NaH + NaCl.$$

Mais, en chauffant progressivement le tube, j'ai constaté l'apparition d'une tension gazeuse qui augmente avec la température et qui reprend les valeurs antérieures quand la température diminue.

---

[1] Ditte, *Leçons sur les Métaux,* t. I, p. 539. Dunod, 1891.

A la température de	100°	la tension atteint		15^{mm}
»	120	»	»	23
»	175	»	»	77 à 78^{mm}
Redescendant à	120	»	revient à	24

Donc l'acide gazeux est déplacé sous l'influence de la chaleur, en manifestant une tension comparable à celle des vapeurs saturées.

J'ai observé des faits analogues en étudiant méthodiquement l'action de l'acide sulfurique pur sur le sel marin fondu et pulvérisé. Les tensions sont très différentes de celles qui précèdent, puisque la réaction est tout autre; et les tensions changent avec les masses parce que deux réactions se superposent et changent la variance du système :

$$SO^4H^2 + NaCl = SO^4NaH + HCl,$$
$$SO^4H^2 + 2NaCl = SO^4Na^2 + 2HCl.$$

Cet exemple, qui se rapporte à la préparation de l'acide chlorhydrique, montre combien les faits les plus simples et les plus usuels sont encore mal connus, et combien, par conséquent, un contrôle rationnel est nécessaire en Chimie.

Pour éviter les difficultés indiquées dans le dernier cas que je viens d'ébaucher, j'ai choisi des métaux qui, dans les circonstances de l'expérience, ne possèdent qu'un seul chlorure et un seul sulfate. Tels sont le plomb et le cuivre.

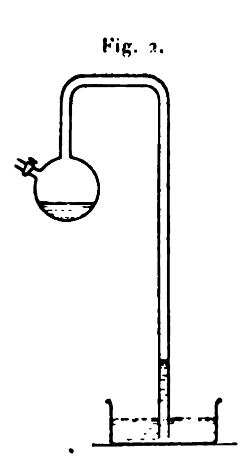
Cas des sels de plomb. — Dans deux ballons inégaux, l'un de 130^{cm^3}, l'autre de 380^{cm^3}, j'ai placé le même poids (10^{gr}) de sulfate de plomb séché à 150°, et j'ai rempli les appareils de gaz chlorhydrique sec. Puis, ayant maintenu ces ballons successivement dans la glace fondante et dans de l'eau à diverses températures ambiantes, j'ai observé les pressions finales d'équilibre à l'aide d'un tube manométrique adapté à chaque ballon. Jusqu'à 28° le gaz chlorhydrique est absorbé en formant un vide partiel. Voici, en millimètres de mercure, les tensions du gaz chlorhydrique à ces

diverses températures :

A 0°	1er ballon	180mm	2e ballon	179mm
A 10	»	284	»	278
A 14,5..........	»	351	»	357
A 18	»	425		
A 25	»	626		
A 30	»	780		

Ces tensions sont sensiblement indépendantes de la masse du sulfate de

Fig. 2.



plomb attaqué et de celle du gaz chlorhydrique. De plus l'action chimique est régie par l'équation

$$SO^4Pb + 2HCl = SO^4H^2 + PbCl^2;$$

car la formation de l'acide sulfurique se constate avec facilité en comprimant dans du papier d'amiante le mélange retiré rapidement du ballon, tandis qu'il n'existe aucun composé intermédiaire tel que SO^4Pb, $n\,HCl$, etc.

D'autre part si, dans les ballons remplis de gaz chlorhydrique, on fait réagir l'acide sulfurique pur sur le chlorure de plomb, on constate qu'aucune attaque ne se produit, à la température ordinaire, mais que la décomposition commence dès qu'on enlève assez de gaz HCl pour que la tension s'abaisse au-dessous de la tension de décomposition.

Cas des sels cuivriques. — Le sulfate cuivrique anhydre SO^4Cu fournit des résultats analogues lorsque le gaz chlorhydrique sec réagit sur lui. Ce gaz est partiellement absorbé avec formation de chlorure cuivrique brun $CuCl^2$.

Voici les tensions que j'ai mesurées :

A la température de	0°	la tension mercurielle est	87^{mm},
»	12,5	»	99,
»	38	»	192,
»	78	»	559,
»	100	»	918 environ.

Quand, de la température 38°, on revient à 12°,5, on retrouve la pression de 99^{mm}. Cette tension se rétablit après l'introduction dans l'appareil d'une quantité de gaz chlorhydrique égale à 30 pour 100 du gaz antérieurement absorbé. De plus, dans certaines expériences, j'ai constaté, au sein de la masse solide, la persistance de taches blanches constituées par du sulfate cuivrique inattaqué ; ce qui prouve que la présence d'un excès de sulfate SO^4Cu ne change pas l'équilibre, pas plus qu'un excès de calcaire dans la dissociation du carbonate de chaux. Nous sommes donc ici encore en présence d'une action hétérogène réversible.

Sans doute, les déterminations n'ont pas une entière rigueur (1er Tableau), mais l'altération si facile de l'acide sulfurique normal SO^4H^2 par des traces d'impuretés et par le gaz chlorhydrique lui-même explique ces divergences, et l'allure des phénomènes n'est pas douteuse : c'est celle des vapeurs saturées.

Sanction de la loi des phases. — Le dégagement de chaleur produit par la condensation de l'acide chlorhydrique est un premier indice de l'exactitude de cette assimilation [1]; mais la loi des phases, que je ne

[1]
$$SO^4Pb + 2HCl = SO^4H^2 + PbCl^2 + 17200^{cal},$$
$$SO^4Cu + 2HCl = SO^4H^2 + CuCl^2 + 20000^{cal},$$
$$SO^4Na^2 + HCl = SO^4NaH + NaCl + 17700^{cal}.$$

connaissais pas au début de mes recherches, en démontre péremptoirement la légitimité.

Quand on sait que la dissociation de l'oxyde cuivrique, en apparence si semblable à la dissociation du carbonate de chaux,

$$2\,CuO\ \text{liq.} \rightleftharpoons Cu^2O\ \text{diss.} + \overset{\nearrow}{O}$$

est en réalité un système à deux variables (comme le prouve d'ailleurs l'expérience directe), on peut douter qu'une réaction aussi compliquée que la réaction des acides sur les sels rentre dans le cas des systèmes monovariants. Or, la décomposition du sulfate de plomb fournit 4 phases (gaz HCl, liquide SO^4H^2, solides SO^4Pb et $PbCl^2$) et renferme 4 corps liés par une seule condition, la réaction chimique uniquement réalisée :

$$SO^4Pb + 2\,HCl = SO^4H^2 + PbCl^2,$$

ce qui ramène à 3 le nombre c des composants indépendants. La variance du système, déterminée dans le cas présent par l'équation de Gibbs, $N = c + 2 - \varphi$, devient $3 + 2 - 4 = 1$.

Le système étudié est donc bien monovariant, comme la dissociation du carbonate de chaux amorphe ou la transformation du cyanogène en paracyanogène.

2° *Déplacement réciproque des bases.*

Le déplacement, par une base fixe, d'une base volatile en combinaison est souvent aussi une action limitée par la tension de l'alcali volatil, comparable en tout point au cas des vapeurs saturées. J'ai mis ce fait en évidence par des expériences touchant l'action du gaz ammoniac sur les chlorhydrates de pipéridine et de dibutylamine (iso-dibutylamine).

M. F. Bidet, continuant l'étude de ces réactions au laboratoire de l'École Polytechnique, a confirmé ces premiers résultats en substituant à l'ammoniaque d'autres bases gazeuses, la méthylamine, l'éthylamine, etc.

Lorsqu'on met la pipéridine en contact avec du chlorhydrate d'ammoniaque, le gaz AzH^3 s'échappe, en manifestant une tension gazeuse qui atteint la pression de 1255^{mm} de mercure à 0°.

Inversement, le chlorhydrate de pipéridine, au contact du gaz ammoniac, abandonne la pipéridine qui s'assemble en gouttelettes. La réaction dégage de la chaleur

$$AzC^5H^{12}.HCl + AzH^3 = AzH^3.HCl + AzC^5H^{12} + 8000^{cal}.$$

Il en est de même de l'action du gaz ammoniacal sur le chlorhydrate de di-isobutylamine

$$AzC^8H^{15}.HCl + AzH^3 = AzH^3.HCl + AzC^8H^{15} + 5500^{cal}.$$

Mais, dans les deux cas, l'absorption est limitée par des tensions ci-dessous indiquées :

Pipéridine.		Dibutylamine.	
0°	1255mm	0°	40mm
6,7	1595	11	53
8,3	1698	38 (éther)	85

Ainsi donc, que l'alcaloïde appartienne à la série grasse ou qu'il appartienne à la série cyclique, il donne lieu aux mêmes particularités : il est déplacé par l'ammoniaque, d'une manière réversible, et la tension gazeuse est uniquement fonction de la température.

En un mot, le système formé par le mélange des corps est monovariant, d'après l'*expérience directe*.

La *loi des phases* conduit à la même conclusion. L'équilibre comprend quatre phases (le gaz AzH^3, l'alcaloïde liquide et les deux sels solides); en outre, trois composants indépendants concourent à l'équilibre. La variance N est donc

$$3 + 2 - 4 = 1.$$

EXTENSION DES LOIS DE BERTHOLLET.

Déplacement réciproque des métaux.

Des cas de réversibilité analogues se rencontrent dans le déplacement des métaux volatilisables ; mais ils se compliquent souvent de la formation d'alliages métalliques qui, réduisant le nombre des phases, augmentent ainsi la variance. Toutefois j'ai pu constater que le mercure réagit sur le sulfure d'argent légèrement chauffé et qu'inversement l'argent décompose le cinabre vers 300° avec mise en liberté de vapeurs mercurielles.

L'argent réagit également vers 260° sur le calomel, quand on chauffe dans le vide le mélange des deux corps ; mais le calomel se volatilisant lui-même à cette température, on se trouve en présence d'un équilibre qui n'est pas complètement assimilable aux tensions de vapeurs saturées, comme le précédent.

L'hydrogène déplace l'argent de son sulfate et la condensation de l'hydrogène dégage 26000^{cal}. Mais le déplacement qui est insensible à 0°, dans la glace fondante, apparaît à 100° et il est assez rapide à 120°. Il semble que la tension du gaz hydrogène diminue quand la température s'élève, ce qui impliquerait l'impossibilité absolue de l'action inverse. En réalité, ce ne sont pas des tensions que l'on observe, mais des vitesses relatives à une action totale, car l'action inverse $Ag^2 + SO^4H^2$ ne commence pas à 100° et ne fournit pas d'hydrogène. L'hydrogène ne donne donc pas de déplacement réversible au contact des sels métalliques, et aux basses températures le mercure seul possède cette propriété. Ce fait suffit pour affirmer que, dans les phénomènes hétérogènes les plus variés, on trouve des cas de réversibilité auxquels s'applique l'équation de Clapeyron, avec les restrictions imposées par le principe de Watt ; de sorte que les phénomènes qui se trouvent en désaccord avec ces conditions rationnelles sont constitués nécessairement par des réactions irréversibles. Qu'il s'agisse de la condensation d'un gaz acide, basique ou neutre, du

déplacement réciproque d'acides ou de bases..., la règle est la même. La voici dans sa généralité :

GÉNÉRALISATION.

En somme, *dans tout système hétérogène à face monovariante, le déplacement isothermique du facteur volatil est absolu quand il est accompagné d'un dégagement de chaleur.*

Comme corollaire, une condensation gazeuse isothermique absorbe nécessairement de la chaleur ; mais la réversibilité ne peut évidemment se produire que si l'action inverse commence à une température assez basse pour qu'aucun facteur de l'équilibre ne soit altéré physiquement ou chimiquement.

Exemples :

Les réactions suivantes, où l'hydrogène s'échappe avec dégagement de chaleur, sont irréversibles :

$$K^2 + SO^4H^2 = SO^4K^2 + H^2,$$
$$Mg + SO^4H^2 = SO^4Mg + H^2,$$
$$3KOH + Al = Al(OK)^3 + H^3, \ldots.$$

Car, autrement, le système serait monovariant et régi par l'équation de Clapeyron, avec la condition $L > 0$ conforme au principe de Watt (p. 119). Or ici la chaleur dégagée par l'absorption gazeuse L est négative, donc la réversibilité est impossible. Un excès de pression peut arrêter l'émission du gaz H, mais non provoquer le déplacement des métaux. Au contraire, dans la réaction

$$Ag^2SO^4 + H^2 = SO^4H^2 + Ag^2 + 26000^{cal},$$

la condition $L > 0$ étant remplie, la réversibilité est possible. Cherchons à quelle température commence l'absorption de l'hydrogène. Elle est

nulle à 0°, excessivement lente à 100°, appréciable à 120°. La température d'absorption est donc comprise entre 0° et 120°. Or la Chimie nous enseigne que l'action inverse, c'est-à-dire l'attaque de l'argent par l'acide sulfurique, à peine sensible à 120°, ne fournit pas d'hydrogène mais du gaz sulfureux. Donc, les facteurs de l'équilibre étant altérés dans cette action inverse, il est impossible d'atteindre le point figuratif A, origine de la dissociation (*fig.* 2), et le déplacement du gaz hydrogène par l'argent devient impossible pour ce motif.

De même les réactions

$$PbO^2 + SO^2\ (\text{gaz}) = PbSO^4 + 71600^{\text{cal}},$$
$$CaS \ + 4O\ (\text{gaz}) = CaSO^4 + 68000^{\text{cal}}$$

ne peuvent pas être réversibles, quoique L soit positif, parce que $PbSO^4$ résiste à 800°, température à laquelle PbO^2 est complètement altéré; quant au sulfate calcique, au rouge blanc, il ne dégage pas d'oxygène, mais de l'anhydride sulfurique; de sorte que le facteur SO^4Ca se décompose avant que l'on atteigne la température de la réaction inverse

$$SO^4Ca = CaS + 4O.$$

En vertu de notre règle, les réactions

$$SO^4Mg + H^2S = MgS + SO^4H^2 - 33200^{\text{cal}},$$
$$SO^4K^2 \ + H^2S = K^2S + SO^4H^2 - 50000^{\text{cal}}$$

sont impossibles, parce que, dans l'action inverse, le départ du corps gazeux H^2S est accompagné d'un dégagement de chaleur.

En vertu du corollaire, la réaction

$$Ag^2SO^4 + H^2S = Ag^2S + SO^4H^2 + 25400^{\text{cal}},$$

qui pourrait être réversible, ne le devient pas, parce que, bien au-dessous

de la température à laquelle l'acide sulfurique commencerait à réagir sur le sulfure d'argent, il est détruit par le gaz sulfhydrique.

Chimie organique. — Ces règles s'appliquent sans changement aux réactions de la Chimie organique.

La décomposition d'un diazoïque, suivant l'équation caractéristique

$$C^6H^5 - Az:Az - R = C^6H^5 - R + \overset{\nearrow}{Az^2},$$

n'est pas susceptible de réversibilité, car le départ de l'élément gazeux Az^2 est accompagné d'un dégagement de chaleur. De sorte que, si la réaction était réversible, on se trouverait en présence d'un équilibre hétérogène monovariant qui devrait satisfaire à la condition essentielle $L > 0$. Comme cette condition n'est pas remplie, l'équilibre n'est pas possible ; et, s'il n'y a pas de réaction inverse, la décomposition est absolue.

On verrait de la même manière que la préparation de l'oxyde de carbone, par l'addition progressive d'acide formique à l'anhydride phosphorique, est irréversible. Au contraire, l'absorption du gaz CO par l'hydrure de sodium qui, d'après M. Moissan, se fait à très basse température, est totale, parce que le formiate de sodium obtenu dans cette réaction est stable jusqu'au-dessus de 300°, et qu'à partir de cette température, où la réversibilité pourrait commencer, le formiate se transforme en carbonate au lieu de régénérer l'hydrure initial.

CONDITIONS DE TEMPÉRATURE ; VISCOSITÉ.

En résumé, les lois de Berthollet sont un cas particulier des déplacements gazeux. Un gaz qui entre en combinaison fixe dégage nécessairement de la chaleur, mais on ne peut affirmer qu'une élévation de température restaure le système gazeux initial. La possibilité de cette action inverse, de cette restauration, est généralement impossible à prévoir, pas plus qu'on ne peut dire *a priori* si un corps est ou non capable de se vaporiser à T°. Ce genre de propriété constitue une donnée expérimentale.

Toutefois, dans certains cas ci-dessus définis, la connaissance des propriétés usuelles des corps permet d'affirmer l'impossibilité de toute action réversible.

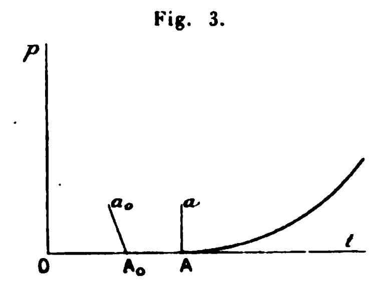
Il y a plus :

Un gaz dont la condensation correspond à un dégagement de chaleur n'entre pas nécessairement en combinaison. Il faut pour cela des conditions de température et des conditions chimiques que j'indiquerai plus loin.

L'expérience montre que la plupart des réactions changent d'allure entre deux températures fondamentales.

Considérons la réaction $CaCO^3 = CaO + CO^2$ par exemple (*fig.* 3).

Fig. 3.



Sous une très faible pression, le gaz carbonique ne réagit sur la chaux qu'à partir d'une certaine température θ_0 figurée par la longueur OA_0, de même que l'oxygène ne réagit sur le charbon qu'à partir d'une certaine température ([1]). Le carbonate formé est fixe au-dessous de θ_0; mais, au-dessus, il commence à se dissocier à une température θ_1. L'origine de cette dissociation est assez difficile à préciser, parce que, dans un intervalle assez grand, la courbe de dissociation diffère peu de l'axe Ot, de sorte que, malgré le grand intérêt que présente l'origine A de la dissociation, cette donnée est mal connue.

Remarque I. — *Les composants libres* $CaO + CO^2$ *ou* $C + O^2$ *subsistent indéfiniment dans la zone* pOA_0a_0; *le système fixe* (*condensé*) *est*

([1]) Cette température de réaction varie avec la pression (expériences inédites). La nature des composants intervient aussi : on sait le rôle que jouait le choix du charbon dans la fabrication des anciennes poudres à canon.

seul possible dans la zone a_0A_0Aa; les composants réapparaissent dans la zone qui renferme la courbe de dissociation (zone de l'équilibre).

REMARQUE II. — *C'est seulement dans cette dernière zone que la chaleur de combinaison peut être compensée par un travail mécanique. Et il semble bien qu'il n'y a pas possibilité de compenser le travail chimique quand la combinaison est figurée par un trajet situé en dehors de la zone d'équilibre aAt.*

L'inaction des acides sur les bases ou de l'oxygène sur le carbone, etc., aux basses températures, s'explique en faisant intervenir des conditions de frottement ou de viscosité dans les formules mathématiques.

Remarquons cependant qu'un système dont le point figuratif se meut dans la région pOA_0a_0, limitée par la courbe A_0a_0, est aussi stable qu'un corps défini. Le diamant, au contact de l'oxygène, par exemple, est aussi stable entre 0° et 100° que le carbonate de chaux. Cette région est, en quelque sorte, la zone des phénomènes physiques à l'aide desquels on définit les espèces matérielles.

C'est seulement lorsque le point figuratif passe à droite de la ligne a_0A_0 que la viscosité me paraît capable d'intervenir; car, là seulement, commencent les réactions chimiques.

Réactions par échelons successifs. — Quoi qu'il en soit, il importe surtout aux chimistes de savoir s'il est possible de vaincre l'inertie des composants, quelle que soit la cause de l'inertie. Ce problème n'est pas simple, même quand la condensation conduit à un composé dont l'existence est certaine.

En apparence, les réactions exothermiques

$$PbS + 4O = PbSO^4,$$
$$KCl + 4O = KClO^4$$

présentent la plus grande similitude, et il n'y a aucune raison mécanique

pour empêcher leur réalisation. En réalité, la réalisation directe du second cas est impossible pour des raisons d'ordre chimique qui relèvent des proportions multiples. Une telle réaction est, en effet, la résultante de deux actions successives :

$$KCl + 3O = KClO^3 - 11\,900^{cal},$$
$$KClO^3 + O = KClO^4 + 19\,700^{cal}.$$

L'oxydation du chlorate $KClO^3$ est possible, mais sa formation par fixation directe d'oxygène sur le chlorure de potassium est impossible; car nous avons vu que la condensation d'un gaz avec absorption de chaleur est irréalisable. Les éléments nécessaires à la seconde réaction font alors défaut. D'où la règle :

RÈGLE. — *Une condensation gazeuse résultant de réactions successives est impossible par voie directe, quand les premières transformations absorbent de la chaleur dans les conditions de l'expérience* [1].

C'est pour ce motif qu'il est inutile de tenter la réalisation directe d'un système tel que

$$PbO + Az^2 + O^5 = Pb(AzO^3)^2 + 54\,400^{cal},$$

parce que cette réaction exothermique nécessite la formation préalable du radical azotique qui absorbe de la chaleur [2].

Examinons d'autres cas singuliers :

Carbonate d'argent. — A propos de la décomposition irréversible du carbonate de plomb, j'ai rappelé la règle fondamentale de Moutier (p. 118); et, cependant, elle ne s'applique pas à l'irréversibilité des décompositions des carbonates métalliques. Ainsi, j'ai prouvé expérimentalement que le

---

[1] Toute action résultant de l'effet de l'étincelle électrique doit être réservée, puisqu'on ne connaît pas les chaleurs dégagées à ces hautes températures.

[2] Nous verrons plus loin comment ce système bivariant peut rentrer dans le cas de systèmes monovariants.

carbonate d'argent, chauffé en vase clos, manifeste des tensions gazeuzes qui augmentent avec la température, mais qui atteignent invariablement la même valeur quand on s'élève à une température déterminée T sans la dépasser.

Cependant, la reconstitution du carbonate CO^3Ag^2 ne se fait pas en milieu sec, même en augmentant la tension du gaz carbonique.

Que cette inertie soit due à un phénomène de viscosité, cela importe moins que de savoir pourquoi, dans la région aAt, il y a inertie dans le cas du carbonate d'argent et non avec le carbonate de chaux.

Dans les deux cas, L et $\frac{dp}{dT}$ sont positifs. Les conditions fondamentales exigées par l'équation de Clapeyron étant alors remplies, la non réversibilité d'un phénomène qui se passe dans la région Aat ne peut être due qu'à la troisième cause que j'ai signalée : l'altération de l'un au moins des facteurs de l'équilibre. Je prétends, en un mot, que l'équilibre ne se rétablit pas parce que les corps qui sortent de combinaison ne sont pas identiques à ceux qui s'unissent; parce que, par exemple, l'oxyde Ag^2O résultant de la réaction $Ag^2CO^3 = Ag^2O + CO^2$ subit par la chaleur une sorte d'isomérisation qui le rend impropre à rentrer en combinaison. C'est pour détruire cet effet que j'ai essayé d'introduire une petite quantité d'eau dans l'appareil à dissociation; et j'ai constaté qu'effectivement le gaz carbonique rentrait en combinaison en conservant les tensions que j'avais observées dans la décomposition directe du carbonate d'argent aux diverses températures.

On objectera que la présence de l'eau transforme le système monovariant initial en système bivariant qui n'est plus comparable au type $CO^3Ca = CaO + CO^2$.

Il est vrai que la tension gazeuse dépend à la fois du gaz carbonique et de la vapeur d'eau. Toutefois, si l'on maintient le tube manométrique à température constante, la tension de la vapeur d'eau devient fixe et l'on rentre dans le cas des systèmes monovariants. C'est dans ces conditions, et en déduisant la tension de l'eau, que le Tableau suivant a été établi :

Tensions du gaz CO^2 *résultant de la dissociation de* Ag^2CO^3.

Températures.	Pressions.
132°,0 (alc. amyl.)...........	6mm
167,0.....................	99
182,5 (aniline).............	173 (sur le sel sec, 174)
210,0 (benzoate éthyl.).......	548 (sur le sel sec, 548)
218,0.....................	752

L'analogie avec le carbonate de chaux est donc rétablie. Elle peut être poussée plus loin : admettons que la chaux provenant de la dissociation du calcaire, au lieu d'être amorphe, cristallise, comme cela arrive aux températures plus élevées du four électrique. La reconstitution du carbonate cesserait alors d'être possible et l'on retrouverait les particularités que j'ai rencontrées avec le carbonate d'argent.

Carbonate de plomb. — D'après Debray, ce sel est décomposable par la chaleur, mais la réaction inverse ne se fait pas.

A mon avis, la cause de cette irréversibilité est due à ce fait que l'oxyde qui se forme dans la décomposition de ce sel n'est pas l'oxyde blanc avide de gaz carbonique; c'est un polymère; car on sait par les travaux de M. L. Henry [1] que les oxydes anhydres sont des corps condensés. Il n'est donc pas surprenant que l'on n'arrive pas à rétablir la réversibilité en agissant conformément à la règle de Moutier. Pour rendre à l'oxyde PbO l'activité nécessaire à l'action inverse, j'ajoute de l'eau. Soit par action sur PbO, soit plutôt en communiquant au gaz carbonique des propriétés acides incessamment renouvelées par le mécanisme si souvent invoqué par M. Berthelot, l'eau provoque la reconstitution du carbonate. En maintenant à 0° la branche manométrique de façon à fixer la tension de l'eau, on trouve les tensions suivantes pour le gaz CO^2 :

---

[1] Sur la polymérisation des oxydes solides, *voir* les travaux de M. L. Henry (*Société scientifique de Bruxelles*, 1879).

Tensions du gaz CO^2 *résultant de la dissociation de* CO^3Pb.

Températures.	Pressions.
184°	12^mm
211	33
234	104
284-285°	760

EXTENSION AUX SYSTÈMES POLYVARIANTS.

On arrive facilement à rendre monovariants par des artifices expérimentaux la plupart des systèmes polyvariants. Considérons par exemple la décomposition de l'azotate d'ammoniaque :

$$AzO^3\,AzH^4 = Az^2O + 2H^2O\,\text{gaz} + 10\,200^{cal}.$$

Si l'équilibre était possible, il dépendrait à la fois de la pression du protoxyde d'azote Az^2O et de la tension de la vapeur d'eau; mais, en adaptant à l'appareil un réfrigérant à température constante, la tension de l'eau devient fixe et l'équilibre reste uniquement soumis à la tension du protoxyde. Celui-ci, en s'échappant, dégage de la chaleur; il ne peut donc plus rentrer en combinaison, de sorte que la réaction est nécessairement irréversible, à l'inverse de la formation des amides.

Considérons encore l'attaque d'un carbonate par un acide dilué :

$$CO^3Ca + SO^4H^2\,\text{dissous} = CaSO^4 + H^2O + CO^2\,\text{gaz}.$$

L'équilibre, dans un tel système, dépendrait de quatre variables et comprendrait quatre phases (une liquide, une gazeuse, deux solides); et il serait relatif à un système bivariant. Choisissons comme variables la pression gazeuse et la dilution de l'acide sulfurique. Nous pourrons rendre constante cette dernière à l'aide d'un artifice analogue à celui des parois semi-perméables de M. van't Hoff; de telle sorte que cette réaction ren-

trera dans la catégorie des systèmes monovariants. Dans ces conditions, le gaz CO^2 s'échappant avec dégagement de chaleur ne pourra rentrer en combinaison; cela est vrai, quelle que soit la dilution; donc les règles établies antérieurement s'appliquent sans variation à cet exemple plus compliqué.

RÉSUMÉ.

La préparation d'un gaz, la mise en liberté d'un métal volatil, le dégagement d'une vapeur basique ou acide en rapport ou non avec les lois de Berthollet, etc., forment un groupe de phénomènes régis par les mêmes règles.

Règles de dilatation.

1° *Un gaz qui s'échappe d'un système fixe avec dégagement de chaleur ne peut rentrer en combinaison pour reconstituer le système primitif.*

C'est une erreur que de chercher à déplacer le fer par l'hydrogène ou l'acide sulfurique par l'acide carbonique, dans la préparation habituelle de ces gaz, même à l'aide de fortes pressions.

2° *Quand, à une température* T, *un gaz s'échappe d'un système fixe avec absorption de chaleur, la réaction est réversible si les facteurs de l'équilibre ne sont pas altérés à la température* T *de la réaction.*

Règles de contraction.

Généralement, un gaz dont la fixation dégage de la chaleur dans les conditions de l'expérience peut entrer en combinaison directe sous une pression déterminée quand on atteint une température suffisante. Toutefois une condensation exothermique n'est pas réalisable quand elle résulte de condensations successives dont l'une au moins est endothermique.

Dans aucun cas on ne peut affirmer *a priori* la réversibilité du phénomène : L'oxygène comprimé à 25^{atm} se fixe sur l'argent vers 300°. L'azote, à la pression atmosphérique, se fixe sur le magnésium vers 400°. Dans le premier cas, la température de combinaison est une température de dissociation ; dans le second cas, c'est une température de réaction non réversible.

Rien ne l'indique *a priori*. L'action n'est réversible que si, par une élévation progressive de la température, on régénère le système hétérogène initial. Évidemment, plus fortement on devra chauffer, plus le système fixe sera stable ; de sorte que *c'est l'élévation de sa température de décomposition plutôt que la grandeur de sa chaleur de formation qui mesure la stabilité d'un système condensé.*

CONCLUSION.

En somme, dans la préparation des corps gazeux, ce sont les règles de dilatation qui interviennent. Elles sont simples et faciles à appliquer tout en restant rigoureuses et générales, conformément au but que je m'étais proposé d'atteindre.

NOTICE

SUR

LA VIE ET LES ŒUVRES D'ALFRED CORNU,

Par M. H. POINCARÉ,

Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes.

Alfred Cornu était né en 1841. En 1860, il entra à l'École Polytechnique, d'où il sortit 2 ans après comme élève-ingénieur des Mines. Mais il abandonna de bonne heure le service actif des Mines pour entrer dans le corps enseignant de l'École Polytechnique. Il était, en effet, encore élève à l'École des Mines, quand le Conseil de perfectionnement le désigna comme répétiteur à l'École Polytechnique en 1864. Dès 1867, à l'âge de vingt-six ans, il fut nommé professeur de Physique dans cette grande École. Son enseignement fut tout de suite très goûté des élèves; il inaugurait un mode nouveau d'exposition de la Physique et, en particulier, de la Thermodynamique.

D'ailleurs, comme membre du Conseil de perfectionnement, il exerça, pendant de longues années, une grande influence sur l'évolution de l'École Polytechnique.

En 1878, il fut nommé Membre de l'Académie des Sciences qui, quelques mois auparavant, lui avait décerné le prix La Caze.

En 1886, il entra au Bureau des Longitudes, et l'on trouvera, dans l'*Annuaire* de ce Bureau, une série de Notices que le public a beaucoup appréciées.

M. Cornu était Membre de la Société royale de Londres, des Aca-

démies de Turin, Rome, Vienne, Saint-Pétersbourg, de celles de Suède, de Belgique, de Boston.

Il fut président de la Société française de Physique et de la Société astronomique de France.

Il était membre du Conseil de l'Observatoire de Paris, où il remplissait les fonctions de secrétaire, et du Conseil de l'Observatoire de Nice.

Quand il fallut, au Congrès de Physique, choisir un président pour recevoir dignement nos hôtes de 1900, c'est à lui que tout naturellement tous ont songé. Nul n'aurait présidé avec plus d'autorité ces débats, où nous avions convié tant d'illustres savants étrangers.

Il était désigné par sa gloire incontestée, qu'avait consacrée le suffrage de tant d'Académies étrangères, par l'étendue et la sûreté de sa science, par la justesse de son esprit. Partout on l'écoutait avec profit parce qu'il savait beaucoup, et on l'écoutait avec plaisir, parce qu'il savait dire.

Qui ne se rappelle avec quelle limpidité il exposait ses découvertes, soit à l'Académie, soit à la Société de Physique, soit à la Société internationale des Électriciens; avec quelle chaleur aussi et surtout avec quelle élégance? Il était aussi jaloux d'une clarté impeccable en face de ses collègues qu'en face de ses élèves. Faire autrement eût été pour lui une souffrance; car ses goûts d'artiste en auraient été choqués. Et, en effet, l'artiste se retrouvait partout, chez le penseur, chez l'expérimentateur, chez le professeur.

Quand il imaginait ou qu'il construisait un appareil nouveau, quand il en étudiait les derniers détails, quand il le décrivait surtout, on sentait que ce n'était pas seulement à ses yeux un instrument, mais un objet d'art, et qu'il ne se préoccupait pas uniquement d'aller au but par le chemin le plus sûr et le plus court. La moindre imperfection le faisait souffrir, non parce qu'elle était une gêne, mais parce qu'elle était une tache.

Aussi, quand il aborda l'étude de la diffraction, il eut bientôt fait de remplacer cette multitude rébarbative de formules hérissées d'intégrales

par une figure unique et harmonieuse, que l'œil suit avec plaisir et où l'esprit se dirige sans effort. Tout le monde aujourd'hui, pour prévoir l'effet d'un écran quelconque sur un faisceau lumineux, se sert de la *spirale de Cornu*. M. Cornu débuta dans la Science par une théorie de la réflexion cristalline; il parvint à ramener ces lois si compliquées à des règles géométriques simples et élégantes et à construire géométriquement le plan de polarisation du rayon réfléchi à la surface d'un cristal.

Cette méthode géométrique était alors nouvelle, et elle ne satisfaisait pas tous les esprits, habitués aux conceptions mécaniques de l'ancienne école. « J'aurais, disait M. Bertrand, loué plus volontiers des tentatives qui, sans donner des conclusions aussi satisfaisantes, paraîtraient plus solidement fondées. » Cette appréciation, venant d'un critique pourtant si éclairé, nous montre bien que ce qui nous paraît aujourd'hui si simple était à cette époque une hardiesse.

Par ses travaux sur la réflexion cristalline Cornu a été conduit à étudier la manière de mesurer les indices d'un cristal biréfringent par la réflexion totale. L'étude expérimentale de la double réfraction l'a aussi occupé quelque temps.

De la réflexion cristalline Cornu est naturellement passé à la réflexion métallique. De ce qu'il nous a appris à ce sujet, nous retiendrons surtout une chose : il n'y a pas d'abîme entre la réflexion vitreuse et la réflexion métallique; on passe de l'une à l'autre par degrés insensibles; si ce passage nous échappe le plus souvent, c'est que notre vue est bornée, que nous ne voyons qu'une toute petite partie du spectre, depuis le rouge jusqu'au violet. La photographie, en suppléant à l'infirmité de notre rétine, nous a révélé l'ultra-violet, champ beaucoup plus vaste que Cornu aimait à explorer et où il a vu, entre autres choses, tous les intermédiaires entre les deux sortes de réflexion.

Il a beaucoup écrit sur la lumière; si, en effet, il a laissé sa trace dans toutes les parties de la Physique, c'est surtout pour l'Optique qu'il avait de la prédilection. Je crois que ce qui l'attirait dans l'étude de la lu-

mière, c'est la perfection relative de cette branche de la Science, qui, depuis Fresnel, semble participer à la fois de l'impeccable correction et de la sévère élégance de la Géométrie elle-même. Là, il pouvait, mieux que partout ailleurs, satisfaire pleinement les aspirations naturelles de son esprit d'ordre et de clarté.

C'est là seulement qu'il pouvait espérer nous donner de petits chefs-d'œuvre d'élégance géométrique comme ceux dont nous venons de parler.

Il reprit, en 1871, la méthode de M. Fizeau pour la mesure de la vitesse de la lumière; il introduisit dans cette méthode d'importants perfectionnements et lui donna plus de précision. Il est certain maintenant que le chiffre définitif ne pourra pas s'écarter beaucoup de celui qu'il a trouvé.

Les expériences qu'il poursuivit à ce sujet entre l'École Polytechnique et le Mont Valérien lui prirent plusieurs années; mais la discussion des résultats, la comparaison de diverses méthodes l'occupèrent toute sa vie; il est mort au moment où de nouvelles expériences, entreprises sous son inspiration, venaient de commencer à Nice.

J'ai déjà parlé de ses recherches sur la diffraction et les intégrales de Fresnel; il n'abandonna jamais ce genre de recherches; il a particulièrement étudié les réseaux, l'influence des inégalités périodiques ou systématiques des instruments qui servent à les tracer et les propriétés focales qui résultent de ces inégalités.

Ces réseaux, si utiles en spectroscopie et que Rowland a portés à un si haut degré de perfection, présentaient souvent des anomalies déconcertantes. Cornu est arrivé à en découvrir la cause : les vis qui servent à les tracer, quelque précises qu'elles soient, présentent cependant de petites inégalités, de sorte que les traits du réseau, si fins et si rapprochés, ne sont pas rigoureusement équidistants. Tantôt ils sont plus serrés, tantôt plus écartés les uns des autres, et les différences se reproduisent périodiquement, chaque fois que la vis a fait un tour complet. Ces différences sont très faibles et n'atteignent que quelques

millièmes de millimètre. Elles suffisent cependant, comme Cornu l'a démontré, pour déplacer le foyer.

Cette imperfection semble inévitable, malgré les progrès incessants réalisés par les constructeurs; Cornu a montré que, dans certains cas, on peut en tirer un parti utile.

Les franges d'interférence lui ont fourni aussi l'occasion de fines études; il a recherché les conditions d'achromatisme de ces franges, et il s'est servi également de cet instrument si délicat pour étudier les déformations élastiques du verre. Rien de plus joli que les hyperboles irisées, qu'il obtenait ainsi et qui montraient d'un coup d'œil tout l'ensemble de ces déformations infiniment petites.

Lorsque deux faisceaux de lumière blanche interfèrent, les franges produites par leurs différentes composantes monochromatiques n'ont pas toujours la même forme; les points où la lumière reste blanche se trouvent alors sur une ligne qui vient croiser toutes ces franges monochromatiques suivant une loi que Cornu a débrouillée, d'une part par l'analyse théorique du phénomène, d'autre part en examinant les franges à travers un spectroscope.

Dans cette région mixte où l'Optique confine à l'Électricité, il a étudié à plusieurs reprises la polarisation magnétique, et tout récemment encore il a fait faire à cette partie de la Science un progrès signalé. C'était au moment où le phénomène de Zeeman venait d'être découvert. Tout le monde croyait que les raies spectrales, et en particulier la raie D, se décomposaient en un triplet. Le premier, il vit qu'il y avait quatre composantes, et que le soi-disant triplet était un quadruplet.

Cette découverte obligea Lorentz à modifier sa théorie, en en conservant les traits les plus essentiels, mais en lui faisant perdre cette simplicité qui l'avait d'abord séduit. Depuis, de nombreuses observations ont mis hors de doute la complexité extrême du phénomène et ont montré que le quadruplet découvert par Cornu était encore l'un des cas les plus simples.

La spectroscopie le préoccupa beaucoup et, en particulier, l'importante question du renversement des raies; il montra clairement les conditions de ce phénomène si utile en Astronomie.

Cette étude du renversement était déjà fort intéressante par elle-même; mais ce qui en a doublé l'importance, ce sont les conséquences qu'on en a tirées pour la classification des raies spectrales. Au premier abord, les spectres des divers éléments nous paraissent un pur chaos; nous savons aujourd'hui qu'il n'en est rien et que la distribution des raies obéit à des lois relativement simples; nous pressentons que la connaissance complète de ces lois nous révélera quelques-uns des secrets de la constitution de la matière; mais elles nous sont restées longtemps cachées, parce que les spectres les plus simples se composent de plusieurs séries, qui empiètent les unes sur les autres. Le premier point était donc de distinguer ces séries pour pouvoir les isoler. Or les circonstances du renversement fournissaient un criterium, qui, comme l'a très bien vu Cornu, facilitait cette distinction.

Il a imaginé un procédé très ingénieux pour distinguer les raies telluriques des raies d'origine solaire. En vertu du principe Doppler-Fizeau, les raies sont déplacées quand la source est en mouvement. Or le Soleil tourne rapidement sur lui-même; si donc on observe successivement les deux bords de cet astre, les raies d'origine solaire semblent se déplacer, les raies d'origine terrestre ne changent pas; l'observation se fait en imprimant au spectroscope une sorte d'oscillation rapide; les raies, qui participent à cette oscillation, se distinguent facilement, ce sont celles qui nous viennent du Soleil. Il a étudié en particulier le spectre ultra-violet du Soleil et son absorption par les parties supérieures de l'atmosphère. Ses études sur le spectre solaire, sur le spectre des étoiles nouvelles, sur celui de la couronne, sont appréciées vivement par les astronomes.

Le spectre ultra-violet s'étend beaucoup plus loin que le spectre visible; ce qui nous limite, ce n'est pas la sensibilité des plaques photographiques, qui seraient impressionnées par des ondes beaucoup plus

courtes, c'est l'absorption des radiations les plus réfrangibles par les lentilles et par l'air. Voilà l'ennemi que Cornu avait à combattre et, pour en triompher, il lui a suffi d'employer des objectifs et des prismes en quartz ou en spath.

L'étude des raies telluriques l'a aussi occupé fort longtemps, il a, grâce au procédé dont nous parlions plus haut, discerné la part de notre atmosphère dans la production des trois groupes A, B et α et séparé l'influence de la vapeur d'eau de celle de l'oxygène sec. Il suivait ainsi avec succès les traces de Janssen et de Langley.

Cornu s'est beaucoup attaché à perfectionner les instruments d'optique; il disait souvent que l'Optique géométrique a été trop négligée, qu'elle nous réserve encore, non sans doute des surprises, mais une foule de ressources qu'on ne songe pas à employer.

Les instruments sont imparfaits, et ils ne peuvent pas ne pas l'être; ils le seraient encore, quand même le travail de l'opticien serait absolument sans défaut, quand même les verres seraient tout à fait transparents et homogènes, puisque les aberrations prévues par la théorie sont en tous cas inévitables.

Inévitables, sans doute, mais l'art peut les atténuer en les opposant habilement les uns aux autres. Chaque défaut, à ce compte, devient un bienfait, puisqu'il peut servir de remède à un défaut contraire.

« Souvent, en effet, disait Cornu, dans les particularités mêmes qui, au premier abord, paraissent des imperfections fâcheuses, on trouve des ressources utilisables pour d'autres genres d'expériences. »

C'est ce qu'il a lui-même fait bien souvent. Ses expériences sur la vitesse de la lumière l'avaient familiarisé avec l'emploi et le réglage des collimateurs. Il s'est rendu compte ainsi du parti que les astronomes pourraient en tirer : il a imaginé plusieurs appareils très portatifs, très faciles à régler et très précis; le dernier en date est la lunette zénitho-nadirale, dont il a présenté le plan au Congrès de Géodésie de 1900 et qui permettrait des mesures de latitude relativement rapides et extrêmement exactes. C'est une merveille de précision et une application

d'une élégance inattendue des lois les plus simples de l'Optique géométrique.

Citons encore un exemple de l'ingéniosité et de la simplicité que déployait Cornu dans la solution des problèmes d'Optique géométrique.

On a une lunette destinée à l'observation visuelle et achromatisée dans ce but; on veut l'utiliser pour la photographie, faudra-t-il changer l'objectif? Pas du tout, il suffira d'écarter de quelques millimètres les deux lentilles de flint et de crown dont il se compose. Ce fut à l'occasion du passage de Vénus qu'il eut cette idée si simple et si utile aux astronomes.

Ce n'est d'ailleurs pas là le seul service qu'il ait rendu à l'Astronomie; il a inventé une méthode photométrique pour l'observation des éclipses des satellites de Jupiter.

L'observation de ces éclipses est le meilleur moyen de connaître l'heure de Paris, sinon pour les marins, dont les chronomètres se dérangent rarement, au moins pour les explorateurs des continents. Mais l'instant où le satellite s'éteint est difficile à apprécier; sa lumière décroît graduellement; à quel instant disparaît-il? Cela dépend de la puissance de l'instrument avec lequel on l'observe et, même avec un même instrument, deux observateurs qui n'ont pas la même acuité visuelle en jugeront différemment. Ne vaut-il pas mieux, au lieu de guetter une extinction impossible à saisir, observer le moment où l'éclat du satellite prend une valeur donnée? Telle est, en quelques mots, l'idée que Cornu a imaginée et qu'il a rendue pratique.

Dans la préparation des expéditions entreprises à l'occasion du passage de Vénus, et dans la discussion des résultats, Cornu a rendu de très grands services; il a contribué à créer les méthodes de mesure des épreuves photographiques.

Nul, en résumé, ne connaissait mieux que lui les instruments d'optique et, sur ce point, ses lumières ont largement profité à l'Astronomie.

Je ne m'étendrai pas au sujet de ses recherches sur l'Optique météorologique.

Il a consacré plusieurs Notes à des observations de couronnes ou de halos; par des expériences ingénieuses, exécutées devant de nombreux auditoires, il a imité le phénomène du halo et même celui du rayon vert. Il observait souvent la polarisation atmosphérique et les variations des raies telluriques, et il en connaissait l'importance pour la prévision du temps. Je me rappelle un jour où un froid très vif était accompagné d'une pression très élevée; la plupart des météorologistes, se fiant à de nombreux précédents, croyaient que le froid serait de longue durée; tous les signes semblaient leur donner raison; seul Cornu prévoyait qu'il cesserait dès le lendemain et c'est ce qui arriva en effet. L'Optique lui avait révélé ce qui se passait dans les régions supérieures de l'atmosphère, que les rayons solaires avaient traversées.

Je ne puis pas ne pas mentionner une invention très simple pour laquelle son nom devrait être béni de nombreux praticiens, car elle nous a débarrassés des inconvénients du halo photographique.

Puisque nous sommes sur les applications pratiques de l'Optique, parlons encore du procédé stroboscopique si simple et si pratique, qu'il a imaginé, quelques semaines avant sa mort, pour déceler et mesurer les irrégularités de marche d'un alternateur.

La délicatesse de ses sens et, en particulier, l'extraordinaire finesse de son oreille lui furent précieuses dans d'autres recherches, qu'il poursuivit en commun avec M. Mercadier. On discutait depuis longtemps sur les intervalles musicaux; les physiciens étaient partagés, les uns tenant pour la gamme dite de Platon, les autres pour celle de Pythagore. L'expérience conduisit Cornu à un résultat bien inattendu. Les musiciens emploient tantôt l'une, tantôt l'autre de ces deux gammes, suivant les cas. Ils ne s'en doutaient guère, et ils jetèrent les hauts cris quand on les en avertit; mais le fait n'en est pas moins hors de doute.

J'ai dit plus haut comment Cornu s'était servi des franges d'interférences pour étudier la déformation du verre et d'autres substances élastiques sous l'influence de la flexion ou de la torsion. Son but était de mesurer le nombre de Poisson, c'est-à-dire le rapport des deux

coefficients d'élasticité. Le nombre trouvé par Cornu s'écarte un peu de la valeur théorique : est-ce parce que la théorie est inexacte; est-ce parce que l'expérience s'écarte trop des conditions théoriques, puisque l'épaisseur de la lame, que l'on suppose infiniment petite pour simplifier les calculs, doit nécessairement être finie dans la pratique? Cornu inclinait vers cette seconde hypothèse, mais la question n'a jamais été entièrement tirée au clair.

M. Cornu a repris la célèbre expérience de Cavendish pour la mesure de la densité moyenne du globe terrestre. Il a notablement perfectionné les méthodes, il a éliminé de nombreuses causes d'erreurs et il a obtenu un nombre beaucoup plus précis que ceux qu'on possédait avant lui.

Ceux qui, après lui, ont voulu étudier cette difficile question ont largement profité de ses conseils; avertis par son exemple des pièges qui leur étaient tendus et des moyens de les éviter, ils ont introduit dans ses méthodes de nombreux perfectionnements, mais leur chiffre ne présente pas plus de certitude. On ne se doute pas assez, non seulement dans le public, mais dans le monde savant, de toute la peine que coûte une décimale.

Tous les arts qui veulent de la précision l'intéressaient, et tous les ans il allait à Nice examiner l'horloge astronomique, qu'il y avait installée d'après des principes tout nouveaux; il y apportait des perfectionnements incessants et il approchait chaque jour de la perfection absolue.

Je ne sais si les horlogers voyaient son œuvre d'un très bon œil; le mécanisme dont il se servait était grossier et il se contentait des rouages d'une horloge à bon marché. Il comptait uniquement, pour assurer la régularité de la marche, sur la masse imposante de son pendule, qui poursuivait ses oscillations régulières, sans se laisser troubler par les caprices du mécanisme minuscule qu'on y avait attelé.

Ce qui doit rassurer les horlogers pour l'avenir de leur industrie, c'est qu'un pareil système est encombrant et ne convient qu'aux observatoires.

Dans le même ordre d'idées, il s'est occupé longtemps de la synchronisation électrique des horloges. Le problème semble facile; mais, en réalité, il exige bien des connaissances diverses; la preuve, c'est que les nombreux principes introduits par M. Cornu, et qui apportaient une solution complète et définitive, ne furent pas compris du premier coup.

Les derniers *Annuaires du Bureau des Longitudes* contiennent une série d'études consacrées par M. Cornu aux machines dynamo-électriques, tant à courant continu qu'à courant alternatif ou triphasé; ces Notices, destinées au grand public, mais qui contiennent une foule d'aperçus intéressants pour les savants eux-mêmes, seront prochainement réunies en volumes.

Il est peu de domaines en Physique où il n'ait reculé les bornes de la précision, où il ne nous ait laissé quelque petit modèle d'une perfection achevée.

Mais l'Optique l'a toujours attiré; il y revenait sans cesse, même quand cette science était délaissée par la mode. Les instruments d'optique, la diffraction, le spectre solaire, la vitesse de la lumière surtout rappelaient constamment son attention. C'est en mesurant cette vitesse qu'il avait débuté; il y pensait encore dans ses derniers jours. Il avait conçu des projets grandioses dont la réalisation était commencée : il voulait faire voyager le rayon dont il devait mesurer la vitesse entre la Corse et le mont Mounier, où est la succursale de l'Observatoire de Nice.

Comme il aimait cet Observatoire, où il allait tous les ans et où ses conseils étaient hautement appréciés ! Et comment ne pas évoquer le souvenir de ce voyage, où nous l'avons vu, au sommet de ce mont Mounier, regardant la mer au-dessus de laquelle il voulait faire passer la lumière ? Avec quelle confiance il parlait de son rêve, et qui de nous eût pu croire alors qu'il n'en verrait pas l'accomplissement ?

C'est que, quand il croyait au succès, on pouvait le regarder comme assuré. Sa critique était sûre, et il se défiait de l'enthousiasme. Il savait de quelles embûches l'expérimentateur est environné et à quel prix la

précision ou la certitude scientifique peuvent s'acquérir. Nul ne savait mieux que lui prévoir tous les pièges, et en lui donnant la main on était certain de les éviter. Il n'est pas un physicien à qui ses conseils n'aient épargné quelque mécompte.

Aussi n'était-il pas dupe de ces modes passagères qui entraînent les foules scientifiques aussi facilement que les foules vulgaires. Toujours il attendait la preuve avant de croire.

Il aimait les débutants et il cherchait à les encourager; mais, en même temps, il les prémunissait contre les écueils, sur lesquels leur ardeur juvénile aurait pu les entraîner. Ceux qui avaient accepté sa discipline ne tardaient pas à en reconnaître la sagesse.

On s'explique ainsi l'influence qu'il exerçait sur tous, sur ses élèves, sur ses amis, sur les savants, sur les praticiens. La droiture de son caractère, la simplicité de sa vie, la sûreté de ses amitiés augmentaient encore son autorité. Tous croyaient qu'il en jouirait longtemps encore. Aussi quelle stupeur, quel deuil universel, quand on apprit qu'il n'était plus.

Quand la mort nous enlève un homme dont la tâche est terminée, c'est seulement l'ami, le maître ou le conseiller que nous pleurons; mais nous savons que son œuvre est accomplie et, à défaut de ses conseils, ses exemples nous restent. Combien elle nous semble plus impitoyable quand c'est un savant encore tout rempli de vigueur physique, de force morale, de jeunesse d'esprit, d'activité féconde, qui soudain disparaît; alors nos regrets sont sans bornes, car ce que nous perdons, c'est l'inconnu, qui par essence est sans limites; ce sont les espoirs infinis, les découvertes de demain, que celles d'hier semblaient nous promettre.

De là cette émotion qui s'est emparée du monde savant tout entier, quand cette nouvelle si imprévue, si foudroyante est venue le frapper.

Tous les corps dont il faisait partie étaient atteints cruellement. Partout il avait donné de précieux conseils et l'on en sentait mieux le prix à l'heure où l'on allait en être privé. Que ne pouvait-on encore

attendre de lui ? Il était frappé en pleine activité ! Que de travaux interrompus il laissait derrière lui ? Pourquoi sont-ce les meilleurs, ceux que la mort fauche ainsi sans attendre ?

Son Œuvre, quoique inachevée, reste grande et, bien qu'une si rapide esquisse ne permette guère d'en mesurer l'importance, j'espère avoir donné une idée du caractère si original de son talent.

BIBLIOGRAPHIE.

I. — OUVRAGES ISOLÉS.

1867. — Recherches sur la réflexion cristalline (Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris).

1867. — Titres scientifiques de A. Cornu (Candidature à la place de Professeur de Physique à l'École Polytechnique).

1873-1878. — Notice sur les Titres scientifiques de A. Cornu (Candidature à l'Académie des Sciences), avec supplément pour la période **1873-1878.**

1886. — Principales publications de A. Cornu concernant l'Astronomie physique et la Physique du Globe (Candidature au Bureau des Longitudes).

1867 à **1902.** — Série des Cours de Physique autographiés de l'École Polytechnique.

Les Leçons sur la Théorie mécanique de la chaleur, en 1868, ont été entièrement rédigées par A. Cornu, ainsi que le Calcul de la vitesse de propagation dans un milieu élastique ayant la forme d'une colonne indéfinie.

1904. — Notices sur l'Électricité, extraites de l'Annuaire du Bureau des Longitudes (Électricité statique et dynamique. Production et transport de la force).

II. — PUBLICATIONS INSÉRÉES DANS DES RECUEILS PÉRIODIQUES.

1. Comptes rendus de l'Académie des Sciences.

2 janv. 1863. — *Physique mathématique.* Théorème sur la relation entre les positions des plans de polarisation des rayons incident, réfléchi et réfracté dans les milieux isotropes (t. LVI, p. 87).

9 janv. 1865. — *Optique.* Théorèmes sur la réflexion cristalline (t. LX, p. 47).

18 juin 1866. — *Optique.* Théorèmes géométriques relatifs à la réflexion cristalline (t. LXII, p. 1327).

17 déc. 1866. — *Physique mathématique.* Théorie nouvelle de la réflexion cristalline d'après les idées de Fresnel (t. LXIII, p. 1059).

8 févr. 1869. — *Acoustique.* Sur les intervalles musicaux (en collaboration avec M. Mercadier) (t. LXVIII, p. 301).

22 févr. 1869. — *Acoustique.* Sur les intervalles musicaux (en collaboration avec M. Mercadier) (t. LXVIII, p. 424).

22 mars 1869. — *Physique.* Sur l'adjonction d'un bain de mercure, observé sous l'incidence rasante, dans l'emploi des collimateurs (t. LXVIII, p. 720).

2 août 1869. — *Physique.* Méthode optique pour l'étude de la déformation de la surface extérieure des solides élastiques (t. LXIX, p. 333).

2 mai 1870. — *Physique.* Sur un résultat annoncé par M. Croullebois au sujet de l'indice de réfraction de l'eau (t. LXX, p. 989).

30 mai 1870. — *Acoustique.* Sur les intervalles mélodiques et harmoniques (en collaboration avec M. Mercadier) (t. LXX, p. 1168).

20 juin 1870. — *Physique.* Détermination de l'intensité magnétique terrestre en valeur absolue (en collaboration avec M. Baille) (t. LXX, p. 1337).

17 juill. 1871. — *Physique.* Sur les intervalles musicaux (en collaboration avec M. Mercadier) (t. LXXIII, p. 178).

31 juill. 1871. — *Physique.* Sur le renversement des raies spectrales des vapeurs métalliques (t. LXXIII, p. 332).

28 août 1871. — *Physique.* Réponse à M. Janssen sur la constitution du Soleil (t. LXXIII, p. 545).

2 oct. 1871. — *Physique.* Sur la détermination de la vitesse de la lumière (t. LXIII, p. 857).

29 janv. 1872. — *Acoustique.* Sur les intervalles musicaux mélodiques (en collaboration avec M. Mercadier) (t. LXXIV, p. 321).

5 févr. 1872. — *Physique.* Sur le spectre de l'aurore boréale du 4 février (t. LXXIV, p. 390).

10 févr. 1873. — *Physique.* Détermination nouvelle de la vitesse de la lumière (t. LXXVI, p. 338).

17 févr. 1873. — *Acoustique.* Sur la mesure des intervalles musicaux (en collaboration avec M. Mercadier) (t. LXXVI, p. 431).

14 avril 1873. — *Physique.* Détermination nouvelle de la constante de l'attraction et de la densité moyenne de la Terre (en collaboration avec M. Baille) (t. LXXVI, p. 954).

12 janv. 1874. — *Optique*. Études sur la diffraction; méthode géométrique pour la discussion des problèmes de diffraction (t. LXXVIII, p. 113).

14 déc. 1874. — *Physique*. Détermination de la vitesse de la lumière et de la parallaxe du Soleil (t. LXXIX, p. 1361).

15 mars 1875. — *Physique*. Sur la diffraction, propriétés focales des réseaux (t. LXXX, p. 645).

3 juill. 1876. — *Astronomie physique*. Études de Photographie astronomique (t. LXXXIII, p. 43).

11 déc. 1876. — *Astronomie physique*. Sur le spectre de l'étoile nouvelle de la constellation du Cygne (t. LXXXIII, p. 1172).

14 janv. 1878. — *Physique*. Étude sur le spectre ultra-violet (t. LXXXVI, p. 101).

4 févr. 1878. — *Physique*. Sur les raies sombres du spectre et la constitution du Soleil (t. LXXXVI, p. 315).

25 févr. 1878. — *Physique*. Sur quelques conséquences de la constitution du spectre solaire (t. LXXXVI, p. 530).

4 mars 1878. — *Physique*. Étude de la résistance de l'air dans la balance de torsiou (en collaboration avec M. Baille) (t. LXXXVI, p. 571).

11 mars 1878. — *Optique*. Sur la polarisation elliptique par réflexion à la surface des corps transparents (t. LXXXVI, p. 649).

18 mars 1878. — *Physique*. Sur la mesure de la densité moyenne de la Terre (en collaboration avec M. Baille) (t. LXXXVI, p. 699).

15 avril 1878. — M. Cornu adresse deux planches relatives à la description du spectre solaire ultra-violet (t. LXXXVI, p. 983).

22 avril 1878. — *Physique*. Influence des termes proportionnels au carré des écarts dans le mouvement oscillatoire de la balance de torsion (en collaboration avec M. Baille) (t. LXXXVI, p. 1001).

6 mai 1878. — *Physique mathématique*. Sur l'extension à la propagation de l'électricité des formules de Fourier relatives à la diffusion de la chaleur (t. LXXXVI, p. 1120).

2 juin 1879. — *Physique*. Sur la limite ultra-violette du spectre solaire (t. LXXXVIII, p. 1101).

23 juin 1879. — *Optique*. Sur l'absorption par l'atmosphère des radiations ultra-violettes (t. LXXXVIII, p. 1285).

17 nov. 1879. — *Physique*. Observation sur la limite ultra-violette du spectre solaire à diverses altitudes (t. LXXXIX, p. 808).

26 avril 1880. — *Physique*. Sur la loi de répartition suivant l'altitude de la substance absorbant dans l'atmosphère des radiations solaires ultra-violettes (t. XC, p. 940).

27 déc. 1880. — *Physique*. Sur la vitesse de la propagation de la lumière (t. XCI, p. 1019).

10 janv. 1881. — *Physique*. Sur les conditions relatives à l'expression théorique de la vitesse de la lumière (t. XCII, p. 53).

13 juin 1881. — *Physique*. Sur une loi simple relative à la double réfraction circulaire naturelle ou magnétique (t. XCII, p. 1365).

11 juill. 1881. — Observations à l'occasion de la Communication de M. Croullebois sur la réalité d'une équivalence cinématique en Optique ondulatoire (t. XCIII, p. 55).

21 nov. 1881. — *Optique*. Sur la condition d'achromatisme dans les sphères d'interférence (t. XCIII, p. 809).

10 juill. 1882. — Observation à propos d'une Communication sur les conditions d'achromatisme dans les phénomènes d'interférence (t. XCV, p. 77).

6 nov. 1882. — *Optique*. Sur l'observation comparative des raies telluriques et métalliques, comme moyen d'évaluer les pouvoirs absorbants de l'atmosphère (t. XCV, p. 801).

4 déc. 1882. — *Astronomie*. Résumé des mesures effectuées daguerriennes du passage de Vénus en 1874 obtenues par la Commission française (Cornu et Fizeau) (t. XCV, p. 1082).

9 avril 1883. — *Électricité*. Rapport sur les machines électrodynamiques appliquées à la transmission du travail mécanique de M. Marcel Deprez (t. XCVI, p. 992).

4 juin 1883. — *Astronomie*. Sur la possibilité d'accroître dans une grande proportion la précision des observations des éclipses des satellites de Jupiter (t. XCVI, p. 1609).

25 juin 1883. — *Astronomie*. Études expérimentales relatives à l'observation photométrique des éclipses des satellites de Jupiter (t. XCVI, p. 1815).

31 déc. 1883. — *Météorologie*. Sur un arc-en-ciel blanc, observé le 28 novembre 1883 (t. XCVII, p. 1530).

28 janv. 1884. — *Physique*. Étude spectrale du groupe des raies telluriques nommé α par Angström (t. XCVIII, p. 169).

22 sept. 1884. — *Météorologie*. Observations relatives à la couronne visible actuellement autour du Soleil (t. XCIX, p. 488).

27 oct. 1884. — Observation à l'occasion d'une lettre de Duccaux à Cornu sur les phénomènes qui accompagnent la couronne solaire (t. XCIX, p. 717).

15 déc. 1884. — *Physique mathématique*. Sur la forme de la surface de l'onde lumineuse dans un milieu isotrope placé dans un champ magnétique uniforme; existence probable d'une double réfraction particulière dans une direction normale aux lignes de force (t. XCIX, p. 1045).

11 mai 1885. — *Spectroscopie*. Sur les raies spectrales spontanément renversables et l'analogie de leurs lois de répartition et d'intensité avec celles des raies de l'hydrogène (t. C, p. 1181).

25 mai 1885. — *Météorologie optique*. Sur un halo elliptique circonscrit au halo de 22″, observé le 19 mai 1885 (t. C, p. 1324).

22 févr. 1886. — *Optique*. Vérification expérimentale de la loi de Verdet dans les directions voisines des normales aux lignes de force magnétiques (en collaboration avec M. Potier) (t. CII, p. 385).

31 mai 1886. — *Optique*. Sur des expériences récentes faites par MM. Albert-A. Michelson et Ed.-W. Morley pour reconnaître l'influence du milieu sur la vitesse de la lumière (t. CII, p. 1207).

31 mai 1886. — *Météorologie*. Sur un arc tangent au halo de 46° observé le 30 mai 1886 (t. CII, p. 1210).

20 déc. 1886. — *Optique*. Sur quelques dispositifs permettant de réaliser, sans polariser la lumière, des photomètres biréfringents (t. CIII, p. 1227).

31 mai 1887. — *Physique*. Sur la condition de stabilité du mouvement d'un système oscillant soumis à une liaison synchronique pendulaire (t. CIV, p. 1463).

13 juin 1887. — *Physique*. Sur la synchronisation d'une oscillation faiblement amortie, indicatrice de synchronisation représentant le régime variable (t. CIV, p. 1656).

14 nov. 1887. — *Optique météorologique*. Sur un arc tangent au halo de 22° observé le 8 novembre 1887 (t. CV, p. 910).

5 déc. 1887. — *Chronométrie*. Sur la synchronisation des horloges de précision et la distribution de l'heure (t. CV, p. 1106).

19 déc. 1887. — *Chronométrie*. Réponse à une Note de M. Wolf, intitulée : « Comparaison des divers systèmes de synchronisation des horloges astronomiques » (t. CV, p. 1209).

2 janv. 1888. — *Chronométrie*. Sur une objection faite à l'emploi d'amortisseurs électromagnétiques dans les appareils de synchronométrie (t. CVI, p. 26).

9 janv. 1888. — *Chronométrie*. Sur le réglage du courant électrique, donnant à l'oscillation une amplitude déterminée (t. CVI, p. 96).

16 janv. 1888. — *Chronométrie*. Remarques sur la dernière Note de M. Wolf (t. CVI, p. 162).

23 avril 1888. — *Chronométrie*. Sur le réglage de l'amortissement et de la phase d'une oscillation synchronisée réduisant au minimum l'influence des actions perturbatrices (réglage apériodique) (t. CVI, p. 1209).

5 nov. 1888. — *Astronomie*. Sur l'emploi du collimateur à réflexion de Fizeau comme mire lointaine (t. CVII, p. 708).

18 févr. 1889. — Remarques sur les étoiles filantes à l'occasion d'une Note de M. Minary (t. CVIII, p. 340).

4 mars 1889. — *Optique*. Sur la reproduction artificielle des halos et des cercles parhéliques (t. CVIII, p. 429).

7 mai 1889. — *Optique*. Sur la polarisation elliptique par réflexion vitreuse et métallique. Extension des méthodes d'observation aux radiations ultra-violettes. Continuité existant entre ces deux genres de phénomènes (t. CVIII, p. 917).

17 juin 1889. — *Optique*. Résultats numériques obtenus dans l'étude de la réflexion vitreuse et métallique des radiations visibles et ultra-violettes (t. CVIII, p. 1211).

13 janv. 1890. — A l'occasion d'une Note de MM. Sarasin et L. de la Rive sur la résonance des ondulations électriques de M. Hertz (t. CX, p. 75).

10 mars 1890. — *Physique du Globe*. Sur les phénomènes optiques qui ont été visibles autour du Soleil, le 3 mars 1890 (t. CX, p. 497).

17 mars 1890. — *Optique*. Sur le halo des lames épaisses, ou halo photographique et les moyens de le faire disparaître (t. CX, p. 55).

22 déc. 1890. — *Spectroscopie*. Sur la limite ultra-violette du spectre solaire d'après les clichés obtenus par M. O. Simony au sommet du pic de Ténériffe (t. CXI, p. 941).

26 janv. 1891. — *Optique*. Sur une expérience récente, déterminant la direction de la vibration dans la lumière polarisée (t. CXII, p. 186).

16 févr. 1891. — *Physique mathématique*. Sur les objections faites à l'interprétation des expériences de M. Wiener (t. CXII, p. 365).

19 mai 1891. — *Météorologie optique.* Sur un double halo avec parhélies, observé le 15 mars 1891 (t. CXII, p. 1108).

25 janv. 1892. — Observations sur un halo autour de la Lune (t. CXIV, p. 193).

— Rapport sur le prix Gay.

4 avril 1893. — *Optique.* Remarque sur la Note de M. P. Joubin relative à la mesure des grandes différences de marche en lumière blanche (t. CXVI, p. 711).

9 mai 1893. — *Optique.* Études sur les réseaux diffringents. Anomalies focales (t. CXVI, p. 1215).

19 juin 1893. — *Optique.* Sur diverses méthodes relatives à l'observation des propriétés appelées *anomalies focales* des réseaux diffringents (t. CXVI, p. 1421).

3 juill. 1893. — Observations à l'occasion d'une Note sur l'autoconduction (t. CXVII, p. 37).

24 juill. 1893. — A propos d'une Note de M. Meslin, nouvelles franges d'interférence (t. CXVII, p. 228).

26 déc. 1893. — *Optique.* Vérifications numériques relatives aux propriétés focales des réseaux diffringents plans (t. CXVII, p. 1032).

2 févr. 1894. — *Physique.* Sur un théorème reliant la théorie de la synchronisation et celle des résonances (t. CXVIII, p. 313).

11 févr. 1895. — Rapport sur un travail de M. Hardy (t. CXX, p. 300).

13 mai 1895. — A l'occasion d'une Communication de M. Hartmann (t. CXX, p. 1027).

5 août 1895. — *Acoustique.* Étude expérimentale des vibrations transversales des cordes (t. CXXI, p. 281).

22 juin 1896. — *Optique géométrique.* Sur la caustique d'un arc de courbe réfléchissant les rayons émis par un point lumineux (t. CXXII, p. 1455).

18 oct. 1897. — *Physique.* Sur l'observation et l'interprétation cinématique des phénomènes découverts par le Dr Zeemann (t. CXXV, p. 555).

17 janv. 1898. — *Optique.* Sur quelques résultats nouveaux relatifs au phénomène découvert par M. le Dr Zeemann (t. CXXVI, p. 181).

24 janv. 1898. — *Optique.* Addition à la Note précédente (t. CXXVI, p. 300).

21 mars 1898. — Remarque à l'occasion d'une Note de M. Ch. Féry (t. CXXVI, p. 892).

12 déc. 1898. — Présentation de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes pour* **1899** et de la *Connaissance des Temps pour* **1900** (t. CXXVII, p. 996).

26 févr. 1900. — *Optique*. Sur la loi de rotation diurne du champ optique fourni par le sidérostat et l'héliostat (t. CXXX, p. 537).

14 mai 1900. — *Astronomie*. Sur un appareil zénitho-nadiral destiné à la mesure des distances zénithales d'étoiles voisines du zénith (t. CXXX, p. 1285).

26 nov. 1900. — *Physique*. Action du champ magnétique terrestre sur la marche d'un chronomètre aimanté (t. CXXXI, p. 859).

29 avril 1901. — *Astronomie*. Sur la compensation mécanique de la rotation du champ optique fourni par le sidérostat et l'héliostat (t. CXXXII, p. 1013).

15 juill. 1901. — *Optique*. Détermination des trois paramètres optiques principaux d'un cristal en grandeur et en direction par le réfractomètre (t. CXXXIII, p. 125).

16 sept. 1901. — *Optique*. Démonstration et usages des formules, relatives au réfractomètre (t. CXXXIII, p. 463).

2. Discours et Éloges funèbres insérés dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences.

4 sept. 1880. — Discours prononcé à l'inauguration de la statue de Blaise Pascal à Clermont-Ferrand.

8 oct. 1888. — Discours prononcé à l'inauguration de la statue d'Ampère à Lyon.

27 mai 1890. — Notice sur les travaux de M. Louis Soret.

11 juin 1893. — Discours prononcé à l'inauguration de la statue de François Arago à Paris.

30 sept. 1895. — Discours présidentiel à l'occasion de la mort de M. Pasteur.

22 sept. 1896. — Discours prononcé aux funérailles de M. Hippolyte Fizeau.

26 oct. 1896. — Discours présidentiel à l'occasion de la mort de M. Félix Tisserand.

21 déc. 1896. — Discours présidentiel à la Séance publique annuelle de l'Académie des Sciences.

12 juin 1899. — Sur le Jubilé de Sir G. Stokes et le centenaire de l'Institution Royale.

9 avril 1900. — Discours prononcé aux funérailles de M. Joseph Bertrand.

3. Académie des Sciences. — Recueil de Mémoires.
Rapports et documents relatifs à l'observation du passage de Vénus sur le Soleil.

1867. — Observations diverses insérées aux procès-verbaux des Séances (t. I, 1re Partie).

25 janv. 1873. — Note sur la transformation de l'achromatisme optique des objectifs en achromatisme photographique (t. I, 2e Partie, p. 265 à 269).

22 févr. 1873. — Note sur l'approximation en valeur absolue des pointés sur les épreuves daguerriennes du disque solaire, obtenues avec la lunette photographique (t. I, 2e Partie, p. 299 à 302).

22 févr. 1873. — Description de la méthode permettant l'achromatisme photographique des objectifs achromatisés pour la vision directe.

Description succincte d'une opération fournissant des épreuves daguerriennes du disque solaire (t. I, 2e Partie, p. 303 à 313).

22 févr. 1873. — Rapport sur la photographie par images directes (en collaboration avec M. Fizeau) (t. I, 2e Partie, p. 315 à 321).

21 juin 1873. — Examen micrométrique d'une épreuve daguerrienne obtenue au foyer d'un objectif astronomique, achromatisé chimiquement par l'écartement des verres (t. I, 2e Partie, p. 403 à 413).

21 juin 1873. — Méthode d'observation pour le passage de Vénus et pour les éclipses du Soleil (t. I, 2e Partie, p. 415 à 427).

21 juin 1873. — Résultats numériques relatifs à l'observation photographique de l'éclipse partielle du Soleil du 26 mai 1873 (t. I, 2e Partie, p. 429 à 441).

16 déc. 1873. — Étude de la dispersion des verres employés à la confection des objectifs des lunettes photographiques de la Commission (t. I, 2e Partie, p. 443 à 446).

16 déc. 1873. — Théorie élémentaire de la méthode d'achromatisme des objectifs par écartement des verres (t. I, 3e Partie, p. 447 à 451).

1887. — Légende explicative de la planche relative à la lunette photographique destinée à l'observation du passage de Vénus (t. I, supplément à la 2e Partie ; p. 109 à 113 et 1 planche).

1883. — Mesure des épreuves photographiques :

Fascicule A (en collaboration avec M. Fizeau), comprenant le Résumé des études de la Sous-Commission chargée de la mesure des épreuves et les documents qui s'y rattachent (t. III, 3e Partie ; 120 pages et 2 planches).

Fascicule B, comprenant le Résumé des études et des mesures exécutées avec la machine n° 1 (t. III, 3e Partie ; 110 pages).

Fascicule F (p. 94 à 110).

Conclusions.

4. Journal de l'École Polytechnique.

1874. — Détermination nouvelle de la vitesse de la lumière (t. XXVII, XLIVe Cahier, p. 133 à 181 et 1 planche).

1883. — Sur les raies telluriques qu'on observe dans le spectre solaire au voisinage des raies D (LIIIe Cahier, p. 175 à 213 et 1 planche).

1890. — Étude de l'absorption atmosphérique des radiations visibles par l'observation spectrale des faisceaux électriques de la Tour Eiffel (2e série, VIIe Cahier, 8 pages et 2 planches).

5. Annales de l'École Normale supérieure.

1867. — De la réfraction à travers un prisme suivant une loi quelconque (1re et 2e Parties; 2e série, t. I, p. 231 à 272; 3e partie, t. III, p. 1 à 46 et 1 planche).

1881. — Sur le spectre normal du Soleil, portion ultra-violette (1re Partie, 2e série, t. III, p. 421 à 440 et 1 planche; 2e Partie, 2e série, t. IX, p. 1 à 88 et 2 planches).

6. Annales de l'Observatoire de Paris.

1876. — Détermination de la vitesse de la lumière, d'après des expériences exécutées en 1874 entre l'Observatoire et Monthléry (*Mémoires*, t. XIII, 316 pages et 7 planches).

7. Annales de l'Observatoire de Nice.

1899. — Synchronisation des pendules (système de M. A. Cornu), par M. A. Prim (t. I, p. 301 à 313).

8. Bulletin astronomique.

1884. — Notice sur les raies telluriques du spectre solaire et, en particulier, sur le groupe A (t. I, p. 74 à 84).

1885. — Sur certains phénomènes d'optique météorologique apparus depuis la fin de l'année 1883 (t. II, p. 201 à 212).

1887. — Sur quelques dispositifs permettant de réaliser, sans polariser la lumière, des photomètres biréfringents (t. IV, p. 88 à 94).

1900. — Sur la loi de rotation diurne du champ optique fournie par le sidérostat et l'héliostat (t. XVII, févr. 1900, p. 49 à 63).

1901. — Sur un appareil zénitho-nadiral destiné à la mesure des distances zénithales d'étoiles voisines du zénith (t. XVIII, oct. 1901, p. 372 à 389).

9. Annuaire du Bureau des Longitudes.

1886. — Détermination des trois indices principaux de réfraction du soufre cristallisé.

1891. — Sur la méthode Doppler-Fizeau permettant la détermination par l'analyse spectrale de la vitesse des astres dans la direction du rayon visuel.

1892. — Sur la mire lointaine de l'Observatoire de Nice.

1892. — Notice sur la corrélation des phénomènes d'électricité statique et dynamique et la définition des unités électriques.

1896. — Les forces à distance et les ondulations.

1896. — Les travaux de Fresnel en optique.

1898. — Notice sur l'œuvre scientifique de H. Fizeau.

1899. — Unités électriques usitées dans les applications de l'électricité.

1900. — Les machines génératrices de courants électriques.

1901. — Le transport électrique de la force.

1902. — Les courants polyphasés.

10. Journal de Physique théorique et appliquée.

1872. — Sur les mesures électrostatiques (1re Partie, t. I, p. 7 à 25; 2e Partie, t. I, p. 87 à 98; 3e Partie, t. I, p. 241 à 246).

1873. — Relations entre les coefficients thermiques et thermo-élastiques des corps (t. II, p. 41 à 50).

1873. — Sur la détermination de la vitesse de la lumière par la méthode de la roue dentée (séance du 14 mars 1873; t. II, p. 172 à 177).

1874. — Méthode nouvelle pour la discussion des problèmes de diffraction dans le cas d'une onde cylindrique (t. III, p. 5 à 15 et p. 44 à 52).

1874. — Sur la transformation de l'achromatisme optique des objectifs en achromatisme chimique (Note présentée au Congrès de Lyon de l'Association française pour l'avancement des Sciences, 22 août 1873; t. III, p. 108 à 114).

1875. — Sur le levier à réflexion (t. IV, p. 7 à 14).

1875. — Détermination de la vitesse de la lumière et de la parallaxe du Soleil (t. IV, p. 104 à 111).

1877. — Détermination expérimentale des éléments principaux d'un système optique (t. VI, p. 276 à 282 et p. 308 à 315).

1878. — Étude du spectre solaire ultra-violet (t. VII, p. 285 à 295).

1879. — Spectroscope destiné à l'observation des radiations ultra-violettes (t. VIII, p. 185 à 193).

1880. — Sur l'absorption atmosphérique des radiations ultra-violettes (t. X, p. 5 à 17).

1880. — Études photométriques (t. X, p. 189 à 198).

1880. — Détermination des longueurs d'onde des radiations très réfrangibles du magnésium, du cadmium, du zinc et de l'aluminium (t. X, p. 425 à 431).

1882. — Sur une loi simple relative à la double réfraction circulaire naturelle ou magnétique (*Comptes rendus*, t. XLII) (2e série, t. I, p. 157 à 161).

1882. — Sur la condition d'achromatisme dans les phénomènes d'interférence (2e série, t. I, p. 293 à 303).

1883. — Sur un spectroscope à grande dispersion (2e série, t. II, p. 53 à 57).

1883. — Sur l'observation comparative des raies telluriques et métalliques, comme moyen d'évaluer les pouvoirs absorbants de l'atmosphère (2e série, t. II, p. 58 à 63).

1884. — Étude spectrale du groupe de raies telluriques nommé α par Angström (2e série, t. III, p. 109 à 117).

1884. — Rapport sur les machines électro-dynamiques appliquées à la transmission du travail mécanique de M. Marcel Deprez (2e série, t. III, p. 214 à 238 et p. 511 à 514).

1885. — Observations relatives à la couronne visible actuellement autour du Soleil (2e série, t. IV, p. 53 à 59).

1885. — Sur la forme de la surface de l'onde lumineuse dans un milieu isotrope placé dans un champ magnétique uniforme; existence probable d'une double réfraction particulière dans une direction normale aux lignes de force (2e série, t. IV, p. 247 à 254).

1886. — Sur les raies spectrales spontanément renversables et l'analogie de leurs lois de répartition et d'intensité avec celles des raies de l'hydrogène (2e série, t. V, p. 93 à 100).

1886. — Sur la construction des tubes à hydrogène (2e série, t. V, p. 100 à 103).

1886. — Vérification de la loi de Verdet (en collaboration avec M. Potier) (2e série, t. V, p. 197 à 203).

1886. — Sur le spectre ultra-violet de l'hydrogène (2e série, t. V, p. 341 à 354).

1887. — Sur la condition de stabilité du mouvement d'un système oscillant soumis à une liaison synchronique pendulaire (2e série, t. VI, p. 445 à 452).

1887. — Sur la synchronisation d'une oscillation faiblement amortie. Indicatrice de synchronisation représentant le régime variable (2e série, t. VI, p. 452 à 464).

1888. — Sur la synchronisation des horloges de précision et la distribution de l'heure (2e série, t. VII, p. 231 à 239).

1889. — Sur le réglage des divers éléments du dispositif synchronisateur des horloges de précision (2e série, t. VIII, p. 101 à 116).

1890. — Sur le halo des lames épaisses, ou halo photographique, et les moyens de le faire disparaître (2e série, t. IX, p. 270 à 277).

1893. — Études sur les réseaux diffringents; anomalies focales (3e série, t. II, p. 385 à 393).

1893. — Sur diverses méthodes relatives à l'observation des propriétés appelées *anomalies focales* des réseaux diffringents (3e série, t. II, p. 441 à 449).

1896. — Étude expérimentale des vibrations transversales des cordes (3e série, t. V, p. 5 à 11).

1897. — Sur l'observation et l'interprétation cinématique des phénomènes découverts par le Dr Zeeman (3e série, t. VI, p. 673 à 678).

1898. — Sur la propriété focale des réseaux (3e série, t. VII, p. 83).

1901. — Construction géométrique de deux images d'un point lumineux produit par réfraction oblique sur une surface sphérique (3e série, t. X, p. 607 à 611).

11. Rapports présentés au Congrès international de Physique en 1900.

1900. — Sur la vitesse de la lumière (t. II, p. 225 à 247).

12. Annales des Mines.

1865. — Extraits de minéralogie pour les années 1860 à 1863 (en collaboration avec Daubrée) (6e série, t. X, p. 219 à 258).

1866. — Extraits de minéralogie pour les années 1864, 1865, 1866 (6e série, t. XII, p. 425 à 459).

1867. — Extraits de minéralogie pour l'année 1867 (6e série, t. XIV, p. 300 à 316).

13. Bulletin de la Société de Minéralogie.

1878. — Sur la cause possible d'une erreur dans les mesures goniométriques (t. I, 13 juin 1878, p. 35).

1879. — Sur les phénomènes des houppes sombres (t. II, 13 mars 1879, p. 70).

1883. — Sur l'emploi des condensateurs (t. VI, mai 1883, p. 135).

1884. — Sur certaines apparences que présentent les surfaces artificiellement polies taillées dans le quartz parallèlement à l'axe (t. VIII, 14 févr. 1884, p. 56).

1902. — Détermination des trois paramètres optiques principaux d'un cristal en grandeur et en direction, par le réfractomètre (*Bulletin* de janv. 1902, 23 pages).

14. Annales de Chimie et de Physique.

1867. — Traduction d'un Mémoire de M. Fleeming Jenkin sur l'unité de résistance de l'Association britannique (4ᵉ série, t. X, p. 92).

1867. — Recherches sur la réflexion cristalline (Thèse de doctorat) (4ᵉ série, t. XI, p. 283 à 389 et 2 planches).

1883. — Reproduction du Rapport sur les machines électrodynamiques de Marcel Deprez, inséré dans les *Comptes rendus* (5ᵉ série, t. XXX, p. 214 à 238).

18... — Études des bandes telluriques a, αB, αA du spectre solaire (6ᵉ série, t. VII, p. 5 à 102).

15. Bulletin de la Société chimique.

1863. — Note sur une cristallisation d'oxyde de zinc hydraté, obtenue par la méthode électrochimique de M. Becquerel (p. 64).

1867. — A la séance du 4 janvier 1867, A. Cornu expose ses recherches sur la contraction des mélanges d'acide sulfurique et d'eau (*Bulletin,* 2ᵉ série, t. VII, p. 3).

1867. — Nouvel instrument pour la mesure des pouvoirs rotatoires de M. Jelett (Extrait par A. Cornu) (*Bulletin,* 2ᵉ série, t. VII, p. 4 et 5).

1870. — A. Cornu présente un appareil destiné aux mesures des pouvoirs rotatoires (*Bulletin,* 2ᵉ série, t. XIV, p. 98 et p. 140 à 142).

1871. — A la séance du 4 août 1871, A. Cornu expose ses expériences sur les spectres des vapeurs métalliques (*Bulletin,* 2ᵉ série, t. XV, p. 5).

1871. — Séance du 15 déc. 1871. — Remarques sur la viscosité comme caractère physique pour définir l'individualité des composés (*Bulletin*, 2[e] série, t. XVI, p. 8).

1872. — Séance du 3 février 1872. — Expériences sur la chaleur spécifique des liquides (*Bulletin*, 2[e] série, t. XVII, p. 98).

16. Bulletin de la Société internationale des Électriciens.

1894. — La synchronisation électromagnétique. Conférence faite devant la Société internationale des Électriciens, le 24 janvier 1894 (*Bulletin* d'avril 1894, t. XI, n° 107, 64 pages).

1901. — Méthode optique permettant de déterminer la loi de variation périodique de la vitesse d'un mobile en rotation (*Bulletin* de nov. 1901, 11 pages).

1902. — Étude des variations de la vitesse angulaire du volant d'une machine à gaz Otto à l'aide de la méthode stroboscopique. Projection des clichés obtenus (*Bulletin* de janv. 1902, 7 pages).

17. Éclairage électrique.

1896. — Les forces à distances et les ondulations (extrait de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, t. VI, p. 343 à 352).

1897. — La décimalisation de l'heure et de la circonférence (t. XI, 22 mai 1897, p. 385 à 390).

1897. — Sur l'observation et l'interprétation cinématique des phénomènes découverts par M. le D[r] Zeeman (t. XIII, 6 nov. 1897, p. 241 à 250).

1898. — Sur quelques résultats nouveaux, relatifs au phénomène découvert par M. le D[r] Zeeman (t. XIV, 29 janv. 1898).

18. Travaux et Mémoires du Bureau international des Poids et Mesures.

1893. — Détermination de l'étalon provisoire international. Rapport en collaboration avec M. René Benoit (t. X, 46 pages).

1897. — Sur les obstacles qui s'opposent à l'adoption de l'heure comme unité de temps (6 pages).

19. Congrès de Chronométrie à Paris.

1900. — Action du champ magnétique terrestre sur la marche d'un chronomètre aimanté (5 pages in-4°, Gauthier-Villars).

1900. — Sur l'horloge à grand balancier de l'Observatoire de Nice (8 pages).

20. Comptes rendus de la Xe Conférence générale de l'Association géodésique internationale (Neufchâtel).

1893. — Sur la nécessité d'introduire diverses précautions additionnelles dans les observations astronomiques de haute précision (7 pages).

21. Bulletin de la Société française de Photographie.

Transformation de l'achromatisme optique des objectifs en achromatisme photographique (t. XX, p. 203).

Description de la méthode permettant d'obtenir l'achromatisme photographique des objectifs achromatisés pour la vision directe (t. XX, p. 225).

22. Conservatoire national des Arts et Métiers

1892. — Conférence du 17 janvier 1892 sur la photographie céleste (reproduite dans la *Revue générale des Sciences pures et appliquées,* 30 mai 1892).

23. Revue photographique de Nadar.

1890. — Halo et auréole photographiques (8 pages et 1 planche).

24. Revue générale des Sciences pures et appliquées.

1892. — La photographie céleste. Conférence au Conservatoire des Arts et Métiers (3e année, n° 10, 30 mai 1892).

1895. — Quelques mots de réponse à *La déroute de l'atomisme contemporain* (6e année, n° 23, 15 déc. 1895).

1896. — L'École Polytechnique, le but de son enseignement, l'esprit qui doit inspirer ses programmes (7e année, n° 21, 15 nov. 1896).

1899. — La théorie des ondes lumineuses, son influence sur la Physique moderne. The Rede lecture : 1er juin 1899 (10e année, n° 14, 30 juill. 1899) (traduit dans *Physikalische Zeitschrift,* t. I, n°s 34 et 35, 2 juin 1900, p. 377 à 384).

1900. — Discours d'ouverture du Congrès international de Physique (11e année, n° 15, 15 août 1900, p. 919).

25. Revue scientifique.

1875. — Sur les propriétés focales des réseaux (18 sept. 1875, cf. *Comptes rendus de l'Association française, Congrès de Nantes,* p. 286).

1890. — Le rôle de la Physique dans les sciences (9 août 1890, cf. *Comptes rendus de l'Association française, Session de Limoges*, t. XLVI, p. 161).

1896. — Phénomènes physiques des hautes régions de l'atmosphère (conférence faite à la *Royal Institution* de la Grande-Bretagne (4e série, t. V, p. 200).

26. Recueils divers.

1884. — Les notations chimiques dans l'enseignement de l'École Polytechnique (Note présentée aux membres du Conseil par MM. Cornu et Lemoine, 8 pages, chez Gauthier-Villars).

1890. — L'analyse spectrale en astronomie (conférence faite devant la Société industrielle du nord de la France, 20 pages, Lille, chez Danel).

1902. — Introduction à l'Ouvrage sur l'*Industrie française des instruments de précision*, publié par le Syndicat des constructeurs en instruments d'optique et de précision (12 pages).

27. Association française pour l'avancement des Sciences.

1872. — Sur la constitution physique du Soleil (16 pages, Congrès de Bordeaux, 9 sept. 1872).

1873. — Sur la transformation de l'achromatisme optique des objectifs en achromatisme chimique (p. 197 à 204, Congrès de Lyon, 22 août 1873).

1874. — Sur le levier à réflexion (p. 262 à 268, Congrès de Lille, 26 août 1874).

1882. — 1° Sur la proportion de lumière polarisée par réflexion sur les corps d'indices voisins de l'unité; 2° Sur un nouveau photopolarimètre (5 pages, Congrès de La Rochelle, 25 août 1882).

1884. — Sur les coefficients d'absorption de l'atmosphère pour les rayons ultra-violets et l'influence probable de l'ozone sur la variation de ces coefficients (10 pages, Congrès de Blois, 6 et 8 sept. 1884).

1889. — Les phénomènes optiques de l'atmosphère (12 pages, Congrès de Paris, 23 février 1889).

1890. — Sur le halo photographique (7 pages, Congrès de Limoges, 9 août 1890).

1890. — Sur l'application du photopolarimètre à la météorologie (4 pages, Congrès de Limoges, 11 août 1890).

1890. — Le rôle de la Physique dans les récents progrès des sciences (10 pages, Congrès de Limoges).

28. Bulletin de la Société philomatique de Paris.

1865. — Recherches géométriques sur la réflexion de la lumière polarisée [p. 33, 49, 55; 4, 11 et 12 mars 1865 (extrait de l'*Institut,* journal universel des Sciences, nos 1629, 1630 et 1632)].

1865. — Sur l'emploi des appareils d'interférence pour la mesure des différences de marche entre deux rayons (p. 64).

1865. — Sur l'image d'une droite dans un miroir sphérique (p. 65).

1865. — Sur quelques relations numériques entre les équivalents chimiques et certains minéraux des filons. [p. 203, 23 déc. 1865 (extrait de l'*Institut,* journal universel des Sciences, n° 1671)].

1866. — Sur un nouveau système de projection de la sphère (p. 111).

1867. — Modification de l'appareil d'Arago pour éliminer l'influence de la condensation des gaz sur les parois (p. 2).

1867. — De l'emploi des prismes de Nicol dans les mesures précises de polarisation (p. 5).

29. Nouvelles annales de Mathématiques.

1861. — Note sur les sections toriques (1re série, t. XX, p. 101 à 108).

1863. — Caustiques. Centres de jonction (2e série, t. II, p. 1 à 7).

30. Annales télégraphiques.

1900. — Unités électriques usitées dans les applications de l'électricité (Extrait de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*).

31. Annuaire de l'École Polytechnique.

1894. — Sur la corrélation des phénomènes d'électricité statique et dynamique (extrait de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*).

III. — RECUEILS ÉTRANGERS.

32. The Astrophysical Journal.

1897. — On the observation and kinematic interpretation of the phenomena discovered by Dr Zeeman (Chicago, t. VI, n° 5).

1898. — On certain new results relating to the phenomena discovered by Dr Zeeman (Chicago, t. VII, p. 3).

1900. — On the law of diurnal rotation of the optical field of the siderostat and heliostat (t. XI, juillet 1900, p. 148 à 162).

1901. — The atmospheric absorption of the visible rays, determined from spectroscopic observation of the Eiffel tower electric lights in 1889 (t. XIII, mars 1901, p. 142 à 148).

33. Proceedings of the Royal Society.

1879. — Sur la limite ultra-violette du spectre solaire (p. 47 à 55).

34. Royal astronomical Society (Monthly notices).

1892. — Researches of the mean density of the earth (numéro de juin et numéro supplémentaire).

35. Astronomy and Astro-physics.

1894. — Étude des réseaux de diffraction. Anomalies focales, p. 207 (traduit du *Journal de Physique,* sept. 1893).

36. Nature.

1899. — (27 juillet 1899.) The Rede lecture. The Wawe Theory of Light, its influence on modern physic [reproduit dans le *Smithsonian report for,* 1899 (Washington, 1901)].

37. Royal institution of Great Britain (Lectures).

1875. — New determinations of the velocity of Light (7 mai 1875, Summary, 5 pages).

1895. — Phénomènes optiques des hautes régions de l'atmosphère (7 juin 1895, 11 pages) [reproduit en anglais dans le *Smithsonian report for* 1896 (Washington, 1898)].

38. Memorie della Societa degli Spettroscopisti Italiani.

1891. — Sur la limite ultra-violette du spectre solaire, d'après les clichés obtenus par M. le D[r] V. Simony au sommet du Pic de Ténériffe (t. XX, 5 pages).

39. Archives des Sciences physiques et naturelles de Genève.

1869. — Détermination des longueurs d'onde des radiations très réfrangibles du magnésium, du cadmium, du zinc et de l'aluminium (8 pages).

40. Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles.

1901. — Observation spectrale des franges d'interférence (14 pages).

1901. — Deux méthodes optiques pour l'étude de l'élasticité des corps solides (17 pages).

41. Eders Jahrbuch für Photographie.

1901. — Uber die Anwendung des Magnesium Inductions Funkens zu photographischen Aufnahmen der Interferenz Erscheinungen.

42. Annalen der Physik und Chemie (Annales de Poggendorff).

1863. — Relationen zwischen den Lagen der Polarisations-Ebne des einfallenden, Reflektirten und in isotropen Mitteln gebrochnen Strahles (t. CXVIII, p. 493). (Traduit des *Comptes rendus* du 2 janv. 1863.)

1865. — Theoreme über die Reflexion an Krystallen (t. CXXVI, p. 466). (Traduit des *Comptes rendus* du 9 janv. 1865).

43. Repertorium der Physik, herausgegeben von Dr F. Exnner.

1884. — Ueber die terrestrichen Linien im Sonnenspectrum, speciell uber die Gruppe « a ». (Traduit des *Comptes rendus* du 22 févr. 1884.)

1884. — Beobachtung über den gegenwärtigen sichtbaren Sonnenring. (Traduit des *Comptes rendus* du 22 sept. 1884.)

1884. — Ueber die Form der Wellenfläche des Lichtes in einem isotropen Medium unter dem Einflusse eines homogenen magnetischen Feldes. (Traduit des *Comptes rendus* du 15 déc. 1884.)

1885. — Ueber spontan Umkehrbau Spectrallinien und über die Analogie derselben in Bezug auf Vertheilung und Intensität mit den Wasserstoffinien. (Traduit des *Comptes rendus* du 11 mai 1885.)

1886. — Notiz über die Anfertigung von Wasserstoffröhren. (Traduit du *Journal de Physique,* janv. 1886.)

1886. — Experimentelle Bestätigung der Giltigkeit des Verdet'schen Gesetzes in Richtungen nahezu normal auf die Kraftlinien. (Traduit des *Comptes rendus* du 22 fév. 1886.)

1886. — Ueber das ultraviolette Spectrum des Wasserstoffs. (Traduit du *Journal de Physique*, août 1886.)

44. Astronomische Nachrichten.

1886. — Sur les méthodes photométriques d'observation des satellites de Jupiter (nos 2727-2731).

FIN DU DIXIÈME CAHIER DE LA DEUXIÈME SÉRIE.

TABLE DES MATIÈRES.

35039 IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕ

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION

DE CET ÉTABLISSEMENT.

II

IIᵉ SÉRIE. — ONZIÈME CAHIER.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1906

Journal de l'École Polytechnique. — Ire Série. 64 Cahiers in-4, avec une Table des matières contenues dans les 64 Cahiers; 1794-1894..... 1000 fr.

Les Cahiers suivants se vendent séparément :

VIIe et VIIIe, chaque Cahier.	8 fr.	XXXIe..................	9 fr.
IXe, comprenant la Théorie des fonctions analytiques, par Lagrange..........	7	XXXIIe.................	5
XIe.....................	12	XXXIIIe.................	9
XIIe....................	12	XXXIVe à XXXVIIe........	10
XIIIe...................	8	XXXVIIIe et XXXIXe......	8
XIVe....................	10	XLe à XLIIIe.............	10
XVIe et XVIIe............	8	XLIVe à LIVe............	12
XXIIIe..................	6	LVe à LVIIe..............	14
XXIVe...................	7	LVIIIe...................	10
XXVe et XXVIe...........	8	LIXe.....................	12
XXVIIe..................	9	LXe......................	10
XXVIIIe.................	7	LXIe et LXIIe............	11
XXIXe et XXXe...........	5	LXIIIe..................	12
		LXIVe..................	12

IIe Série.

Ier Cahier..............	10 fr.	VIIe Cahier..............	12 fr.
IIe Cahier..............	10	VIIIe Cahier.............	10
IIIe Cahier..............	10	IXe Cahier...............	10
IVe Cahier..............	13	Xe Cahier...............	10
Ve Cahier..............	10	XIe Cahier..............	11
VIe Cahier..............	10		

Table des Matières contenues dans les 4 premiers Cahiers, formant 45 Volumes, suivie d'une Table analytique et d'une Table générale par noms d'auteurs. In-4; 1895 .... 3 fr.

Répertoire de l'École Polytechnique, depuis l'époque de sa création en 1794, jusqu'en 1853 inclusivement, suivi de la liste des Élèves admis en 1854, avec plusieurs tableaux et résumés statistiques; par M. C.-P. Marielle. Vol. in-8.. 5 fr.

Répertoire de l'École Polytechnique de 1855 à 1865, faisant suite au *Répertoire de M. Marielle;* par M. Le Prieur, Trésorier de l'Ecole. Vol. in-8......... 3 fr.

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

MÉMOIRE

SUR LES

DÉPLACEMENTS A TRAJECTOIRES SPHÉRIQUES,

PAR M. RAOUL BRICARD [1].

CHAPITRE I.

INTRODUCTION.

1. Le présent Mémoire a pour objet la recherche et l'étude des *déplacements d'une figure de grandeur invariable dans lesquels tous les points de la figure décrivent des lignes sphériques*, déplacements auxquels je donnerai, pour abréger, le nom de D. S.

Soit (F') une figure invariable animée d'un D. S. Tous les points de cette figure restent, par définition, sur des sphères dont les centres forment une figure fixe (F). On peut relier par des tiges rigides les points correspondants de (F) et de (F') : je dirai que ces deux figures sont *liées*.

[1] Ce Mémoire a été honoré d'une partie du prix Vaillant décerné par l'Académie des Sciences en 1904, qui avait mis au concours la question des déplacements à trajectoires sphériques.

2. Le problème consistant dans la détermination de tous les D. S. possibles est très compliqué; les figures (F) et (F′) peuvent être à 3, 2, 1 ou 0 dimensions : autrement dit, une étude complète conduirait à la recherche de tous les cas dans lesquels on peut lier : 1° deux espaces; 2° deux surfaces; 3° deux courbes; 4° deux figures formées chacune d'un nombre *fini* de points; 5° un espace à une surface, etc. On verra, au Chapitre VI, dans quelle mesure le problème général m'a paru abordable. Je rappellerai ici les divers résultats déjà publiés dans des travaux antérieurs.

3. I. M. Darboux a déterminé les conditions les plus générales du déplacement d'une figure (à trois dimensions) dont tous les points ont des trajectoires *planes*. La solution du problème, résumée dans une Note des *Comptes rendus* pour 1881, t. XCII, p. 118, est développée dans la Note III de M. Darboux, additionnelle aux *Leçons de Cinématique*, de M. Kœnigs.

M. Mannheim a repris la question (¹), en s'attachant à l'étude du déplacement inverse (déplacement d'une figure dont tous les plans passent par des points fixes).

La solution du problème fait, on le voit, connaître un D. S. pour lequel les figures liées (F′) et (F) sont respectivement un *espace* et *le plan de l'infini*.

II. C'est également à M. Darboux qu'est dû le théorème suivant :

Si trois points d'une droite D′ *sont liés à trois points d'une droite* D, *tout point de la droite* D′ *est lié aussi à un point de la droite* D (²).

III. Le théorème précédent a reçu de M. Mannheim la généralisation suivante (³) :

(¹) *Principes et développements de la Géométrie cinématique*, p. 389.

(²) Kœnigs, *Leçons*, p. 222.

(³) *Loc. cit.*, p. 180.

Si quatre points d'une droite D′ *sont liés à quatre points situés dans un même plan* (P), *tout point de* D′ *est lié à un point d'une certaine conique qui contient les quatre points donnés dans le plan* (P).

IV. Les théorèmes précédents font connaître deux D. S. dans lesquels la figure (F′) est une droite. Pour le premier (à deux paramètres) la figure (F) est une *droite,* dans le second, c'est une *conique*. Mon ami regretté, Ernest Duporcq, s'est proposé de rechercher les conditions les plus générales de D. S. d'une droite, et il a reconnu que le problème admet une troisième solution : D′ est lié à une *cubique gauche* [1].

Je n'énonce pas ici les conditions de ce D. S., sur lequel je reviendrai au Chapitre III.

V. Les théorèmes II et III peuvent être présentés comme cas particulier d'un théorème que j'ai donné sans démonstration en 1896 [2], et dont voici l'énoncé :

Soient dans l'espace C *et* C′ *deux coniques quelconques,* m'_1, m'_2, m'_3, m'_4, m'_5, *cinq points de* C′ *et* m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, *les points de* C *qui leur sont homologues dans une correspondance homographique quelconque* T *établie entre* C *et* C′. *Si on lie les points* m'_1, m'_2, m'_3, m'_4, m'_5, *respectivement aux points* m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, *tout point* m' *de* C′ *est lié au point* m *de* C *qui lui correspond dans la transformation* T.

VI. Le théorème suivant, que j'ai donné en 1901 [3] (également sans

---

(1) *Comptes rendus,* 1897; *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1898, p. 121.

(2) *Comptes rendus,* t. CXXIII, p. 939. Dans une Note *Sur les six droites qui peuvent être les directions de six forces en équilibre* (*Comptes rendus,* 1851, t. LII, p. 1094), Chasles donne un théorème qui, en langage moderne, s'énonce ainsi :

Étant données deux coniques quelconques dans l'espace, entre lesquelles on établit une correspondance homographique quelconque, les droites qui joignent les points homologues dans cette correspondance appartiennent à un complexe linéaire.

Le théorème V est une conséquence immédiate de ce théorème de Chasles.

(3) *Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XXIX, p. 18.

démonstration), fait connaître un D. S. où deux *cubiques planes* sont liées :

Soient Γ *une cubique plane quelconque fixe*, m *et* m_1 *deux points de cette courbe, y constituant un couple steinérien* [1]. *Construisons la cubique* Γ′, *symétrique de* Γ *par rapport à une droite quelconque de l'espace, et soit* m' *le point de* Γ′ *qui est symétrique du point* m_1. On peut déplacer Γ′, en liant tous les couples de points analogues à (m, m').

VII. E. Duporcq a énoncé un élégant théorème qui fait connaître un cas où les figures liées (F) et (F′) sont réduites à un nombre fini de points [2]. Ce théorème est le suivant :

Si 5 *points d'un plan* (P′) *sont liés respectivement à* 5 *points d'un plan* (P), *il existe un sixième point du plan* (P′) *qui est aussi lié à un point du plan* (P).

VIII. Dans un Mémoire publié en 1897 [3], j'ai complètement étudié le cas où les figures liées (F) et (F′) sont toutes les deux réduites à deux plans. Il est inutile d'énoncer ici le résultat, sur lequel je reviendrai ultérieurement (Chap. VIII).

IX. Enfin j'ai fait connaître [4], mais sans rechercher si ce déplacement était le plus général de son espèce, un D. S. pour lequel les figures (F) et (F′) sont toutes les deux à trois dimensions. Ce D. S. est ainsi défini :

La figure (F′) *se meut de telle manière qu'une de ses droites glisse sur une droite fixe; en outre un point de* (F′) *est lié à un point fixe quel-*

---

[1] C'est-à-dire que les tangentes à C, en m et en m_1, vont concourir sur la courbe.

[2] *Comptes rendus*, t. CXXVI, 1898, p. 1405.

[3] *Journal de Mathématiques pures et appliquées.*

[4] *Comptes rendus*, t. CXXIII, 1896, p. 939.

conque. Dans ce mouvement de verrou particulier, tout point de l'espace entraîné avec (F′) *est lié à un point fixe.*

Dans son Mémoire déjà cité sur le *mouvement d'une droite*, E. Duporcq a signalé, sans démonstration, le fait que ce D. S. est le plus général de ceux où les figures liées sont des espaces, si l'on suppose que les droites de (F′) sont liées à des *cubiques gauches*. Il sera démontré au Chapitre VI que cette restriction est inutile (en laissant de côté le D. S. à deux paramètres que l'on obtient en donnant à (F′) une translation telle qu'un de ses points reste sur une sphère).

Dans la suite de ce Mémoire, je référerai aux divers travaux qui viennent d'être cités par les chiffres romains dont je les ai désignés dans ce paragraphe.

4. Je vais maintenant indiquer le plan de ce travail.

J'établis dans le Chapitre II l'équation fondamentale des D. S., et je m'occupe, ce qui est important pour la suite, des *liaisons de points rejetés à l'infini.*

Le Chapitre III est consacré aux *D. S. de droites.*

J'étudie, dans le Chapitre IV, une classe particulière de D. S. : *les D. S. inconditionnels.* Je parviens au théorème de Duporcq sur les *sextuples de points liés*, ainsi qu'aux résultats qui concernent les D. S. *à coniques liées.*

Le Chapitre V est consacré à des D. S. *à cubiques planes liées.*

Je détermine dans le Chapitre VI le *D. S. à espaces liés* le plus général.

Les Chapitres VII et VIII sont consacrés à des recherches plus générales, qui mènent à la connaissance de quelques nouveaux mouvements dont le plus intéressant est un D. S. *à hyperboloïdes liés.*

CHAPITRE II.

FORMULES ET PROPOSITIONS FONDAMENTALES.

5. Je rappelle que les figures liées sont désignées par (F) et (F′). Rapportons chacune d'elles à un trièdre trirectangle, $Oxyz$ pour la figure fixe (F), $O'x'y'z'$ pour la figure mobile (F′). Soient ξ, η, ζ les coordonnées du point O' par rapport à $Oxyz$, et soit

	x	y	z
x'	α	β	γ
y'	α'	β'	γ'
z'	α''	β''	γ''

le Tableau des cosinus des angles des axes fixes et des axes mobiles. Les coordonnées d'un point m de (F) sont désignées par x, y, z, les coordonnées d'un point m' de (F′), par rapport aux axes mobiles, par x', y', z'. Ces notations seront constamment adoptées.

Les coordonnées du point m', par rapport aux axes fixes, sont

$$\begin{aligned} X &= \xi + \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z', \\ Y &= \eta + \beta x' + \beta' y' + \beta'' z', \\ Z &= \zeta + \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z'. \end{aligned}$$

Cela posé, la liaison des points m et m' s'exprime par la relation fondamentale

$$\begin{aligned} (\xi + \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z' - x)^2 + (\eta + \beta x' + \beta' y' + \beta'' z' - y)^2 \\ + (\zeta + \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z' - z)^2 = d^2, \end{aligned}$$

en désignant par d la distance mm'.

En développant cette relation, et en tenant compte des relations classiques entre les cosinus $\alpha, \ldots, \gamma''$, il vient

$$(1)\quad \begin{aligned} &\xi^2+\eta^2+\zeta^2-2x\xi-2y\eta-2z\zeta+2x'(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta)\\ &+2y'(\alpha'\xi+\beta'\eta+\gamma'\zeta)+2z'(\alpha''\xi+\beta''\eta+\gamma''\zeta)\\ &-2xx'\alpha-2xy'\alpha'-2xz'\alpha''\\ &-2yx'\beta-2yy'\beta'-2yz'\beta''-2zx'\gamma-2zy'\gamma'-2zz'\gamma''=h,\end{aligned}$$

en posant

$$h=d^2-x^2-y^2-z^2-x'^2-y'^2-z'^2.$$

6. Il importe de reconnaître quelle forme prend la relation (1) quand, des deux points liés m et m', l'un au moins est rejeté à l'infini.

1° Supposons que le point m' restant à distance finie, le point m s'éloigne à l'infini, dans la direction définie par les équations

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

Faisons dans la relation (1), en désignant par ρ la valeur commune de ces rapports,

$$x=a\rho,\qquad y=b\rho,\qquad z=c\rho,\qquad h=k\rho,$$

il vient

$$\begin{aligned} &\xi^2+\eta^2+\zeta^2-2\rho(a\xi+b\eta+c\zeta)+2x'(\alpha\xi+\ldots)\\ &+2y'(\alpha'\xi+\ldots)+2z'(\alpha''\xi+\ldots)\\ &-2\rho(ax'\alpha+ay'\alpha'+az'\alpha''+bx'\beta+by'\beta'+bz'\beta''\\ &\qquad\qquad+cx'\gamma+cy'\gamma'+cz'\gamma'')=k\rho.\end{aligned}$$

Si l'on fait ρ infini, la relation précédente n'a de sens que si k tend vers une limite finie; cette relation se réduit alors à

$$(2)\quad \begin{aligned} &a(\xi+\alpha x'+\alpha' y'+\alpha'' z')\\ &+b(\eta+\beta x'+\beta' y'+\beta'' z')+c(\zeta+\gamma x'+\gamma' y'+\gamma'' z')=k.\end{aligned}$$


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕ

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION

DE CET ÉTABLISSEMENT.

IIe SÉRIE. — ONZIÈME CAHIER.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1906

a_{34}, par les formules

$$A = \frac{a_{11} - a_{22} - a_{33} + a_{44}}{4}, \qquad B'' = \frac{-a_{11} + a_{22} - a_{33} + a_{44}}{4},$$
$$C = \frac{-a_{11} - a_{22} + a_{33} + a_{44}}{4}, \qquad D = \frac{a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}}{4};$$
$$B'' = \frac{a_{23} + a_{14}}{2}, \qquad C = \frac{a_{31} + a_{24}}{2}, \qquad A' = \frac{a_{12} + a_{34}}{2},$$
$$C' = \frac{a_{23} - a_{14}}{2}, \qquad A'' = \frac{a_{31} - a_{24}}{2}, \qquad B = \frac{a_{12} - a_{34}}{2}.$$

Il résulte de ces dernières formules *qu'à toute relation de la forme* (6) *correspond une relation de la forme* (5), *déterminée sans ambiguïté.*

9. La figure (F′) peut évidemment se déplacer de telle manière que deux de ses directions soient liées à deux directions de (F); on n'impose, en effet, ainsi que deux relations aux cosinus $\alpha, \ldots, \gamma''$. On peut choisir les axes de telle manière que les directions liées soient

$$(a, \ b, \ 0) \quad \text{et} \quad (a', \ b', \ 0),$$
$$(a, -b, 0) \quad \text{et} \quad (a', -b', 0).$$

Les deux liaisons se traduisent alors par les équations

$$(7) \qquad a(a'\alpha + b'\alpha') + b(a'\beta + b'\beta') = k,$$
$$(8) \qquad a(a'\alpha - b'\alpha') - b(a'\beta - b'\beta') = l.$$

Il importe de reconnaître si les équations (7) et (8) peuvent entraîner comme conséquence *qu'il existe, dans les figures* (F) *et* (F′), *un nouveau couple de directions liées,* ce qui se traduirait par une relation de la forme

$$(9) \qquad a_1(a'_1\alpha + b'_1\alpha' + c'_1\alpha'') + b_1(a'_1\beta + b'_1\beta' + c'_1\beta'') + c_1(a'_1\gamma + b'_1\gamma' + c'_1\gamma'') = \text{const.}$$

Aux relations (7), (8), (9) correspondent, comme on l'a vu, des

relations homogènes et du second degré entre les paramètres d'O. Rodrigues :

$$(10) \qquad \varphi(\lambda, \mu, \nu, \rho) = 0, \qquad \psi(\lambda, \mu, \nu, \rho) = 0, \qquad \chi(\lambda, \mu, \nu, \rho) = 0.$$

Ces équations doivent avoir une infinité de solutions communes.

Si l'on considère λ, μ, ν, ρ comme les coordonnées homogènes d'un point de l'espace, les trois équations précédentes représentent des quadriques. *Il faut que la troisième contienne la courbe d'intersection des deux premières, ou tout au moins une partie* C *de cette courbe.*

Il y a plusieurs cas à distinguer, suivant la nature de la courbe C.

1° C *est une biquadratique gauche.*

Alors la quadrique χ doit faire partie du faisceau ponctuel déterminé par les quadriques φ et ψ. Il en résulte que la relation (9) doit être une combinaison linéaire des relations (7) et (8). On doit donc pouvoir trouver deux nombres ρ et σ tels que l'on ait

$$\begin{array}{lll} a_1 a'_1 = aa'(\rho + \sigma), & b_1 a'_1 = ba'(\rho - \sigma), & c_1 a'_1 = 0, \\ a_1 b'_1 = ab'(\rho - \sigma), & b_1 b'_1 = bb'(\rho + \sigma), & c_1 b'_1 = 0, \\ a_1 c'_1 = 0, & b_1 c'_1 = 0, & c_1 c'_1 = 0, \end{array}$$

d'où l'on tire aisément

$$c_1 = c'_1 = 0, \qquad \rho\sigma = 0.$$

Autrement dit, *le couple cherché de directions liées se confond nécessairement avec l'un des deux couples donnés.*

2° C *est une cubique gauche.*

L'examen de ce cas nécessite un calcul qu'il serait sans doute fastidieux de développer complètement. Je vais simplement indiquer la marche à suivre.

Les quadriques φ et ψ ont des équations qui, développées, ont les formes suivantes :

$$(11) \qquad \varphi = A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 + D\rho^2 + 2E\lambda\mu + 2F\nu\rho = 0,$$

$$(12) \qquad \psi = A'\lambda^2 + B'\mu^2 + C'\nu^2 + D'\rho^2 + 2E'\lambda\mu + 2F'\nu\rho = 0.$$

Si l'on considère $\frac{\lambda}{\rho}, \frac{\mu}{\rho}, \frac{\nu}{\rho}$, comme des coordonnées cartésiennes rectangulaires, il est visible que la droite

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0$$

est un axe de symétrie pour chacune des quadriques φ et ψ. Si donc elles se coupent suivant une cubique gauche C et une droite D, D sera nécessairement, soit l'axe des ν, soit une droite rencontrant cet axe à angle droit.

La première hypothèse est à rejeter : en effet, si la droite

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 0$$

appartient aux quadriques φ et ψ, leurs équations se réduisent à

$$A\lambda^2 + B\mu^2 + 2E\lambda\mu = 0,$$
$$A'\lambda^2 + B'\mu^2 + 2E'\lambda\mu = 0.$$

Chacune d'elles se réduit à deux plans, et leur intersection se compose de quatre droites (confondues).

Il faut donc admettre la seconde hypothèse : on exprime que φ et ψ contiennent toutes les deux la droite

$$(13) \qquad \nu = p\rho, \qquad \lambda = q\mu,$$

et l'on élimine p et q entre les quatre conditions obtenues : on obtient ainsi deux conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients A, B, ..., F'.

Ces deux conditions étant supposées satisfaites, les équations (10) et (11) peuvent s'écrire sous les formes suivantes :

$$(10') \quad \varphi = (l\lambda + m\mu)(\lambda - q\mu) + (n\nu + r\rho)(\nu - p\rho) = 0,$$

$$(11') \quad \psi = (l'\lambda + m'\mu)(\lambda - q\mu) + (n'\nu + r'\rho)(\nu - p\rho) = 0.$$

En éliminant les deux binomes $\lambda - q\mu$, $\nu - p\rho$, entre ces deux équations, on forme la relation

$$(14) \quad \chi = (l\lambda + m\mu)(n'\nu + r'\rho) - (l'\lambda + m'\mu)(n\nu + r\rho) = 0,$$

qui représente une nouvelle quadrique contenant la cubique gauche C, mais non la droite D.

En explicitant tous ces calculs, on parvient aux résultats suivants. Désignons respectivement par

Δ,	la direction	$(a, \quad b, \quad 0)$,
Δ_1,	»	$(a, \ -b, \ 0)$,
Δ',	»	$(a', \quad b', \quad 0)$,
Δ'_1,	»	$(a', \ -b', \ 0)$.

Pour que les quadriques φ et ψ se coupent suivant une droite et une cubique gauche, il faut et il suffit que l'un des systèmes suivants de relations soit satisfait :

$$1^\circ \qquad (\widehat{\Delta\Delta_1}) = (\widehat{\Delta\Delta'}), \qquad (\widehat{\Delta'\Delta'_1}) = (\widehat{\Delta_1\Delta'_1}),$$

$$2^\circ \qquad (\widehat{\Delta\Delta_1}) = (\widehat{\Delta_1\Delta'_1}), \qquad (\widehat{\Delta'\Delta'_1}) = (\widehat{\Delta\Delta'}),$$

en désignant par exemple par $(\widehat{\Delta\Delta_1})$ l'angle *aigu* que font entre elles les droites qui portent les directions Δ et Δ_1.

Il est clair que ces deux systèmes de conditions ne diffèrent qu'en ce que les rôles joués par la figure fixe et la figure mobile sont intervertis

dans le second. Nous pourrons donc nous borner à l'examen du premier système, par exemple.

Posons

$$(\widehat{\Delta\Delta_1}) = (\widehat{\Delta\Delta'}) = 2\varphi,$$

$$(\widehat{\Delta'\Delta'_1}) = (\widehat{\Delta_1\Delta'_1}) = 2\psi,$$

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = t, \qquad \operatorname{tang}\frac{\psi}{2} = u.$$

L'équation (14), calculée comme il a été indiqué, est

$$\begin{aligned}\chi = t(1 - t^2u^2)\lambda\nu - tu(t^2 - u^2)\mu\nu \\ + (t^2 - u^2)\lambda\rho - u(1 - t^2u^2)\mu\rho = 0.\end{aligned}$$

Cette relation peut s'écrire, grâce aux formules qui se trouvent à la fin du n° 8,

$$(15) \qquad \begin{aligned}(t - u)(1 - t^2u^2)\gamma + (t + u)(1 - t^2u^2)\alpha'' \\ + (t^2 - u^2)(1 - tu)\gamma' - (t^2 - u^2)(1 + tu)\beta'' = 0.\end{aligned}$$

Cela posé, toute relation linéaire entre les cosinus α, β, ..., γ'' est une combinaison linéaire des relations (7), (8) et (15). Il faut rechercher si une telle combinaison peut être de la forme (9). On trouve aisément qu'elle se réduit alors soit à la relation (7), soit à la relation (8).

En résumé, *dans le cas où* C *est une cubique gauche, il ne saurait exister un troisième couple de directions liées.*

3° C *est une conique.*

Pour tout point de cette conique, λ, μ, ν, ρ doivent satisfaire à une relation linéaire et homogène. Or on sait que, par un changement de coordonnées, on peut toujours ramener une telle relation à la forme [1]

$$(16) \qquad \rho = 0.$$

---

[1] *Voir* Kœnigs, *Traité de Cinématique,* Note III de M. Darboux.

Lorsque cette relation est satisfaite, les formules (4) se réduisent à

$$(17)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{S}, & \alpha' = \beta = \dfrac{2\lambda\mu}{S}, \qquad \alpha'' = \gamma = \dfrac{2\lambda\nu}{S}, \\ & \beta' = \dfrac{-\lambda^2+\mu^2-\nu^2}{S}, \qquad \beta'' = \gamma' = \dfrac{2\mu\nu}{S}, \\ & \qquad\qquad \gamma'' = \dfrac{-\lambda^2-\mu^2+\nu^2}{S}, \\ & S = \lambda^2+\mu^2+\nu^2. \end{cases}$$

On ne peut astreindre les cosinus à plus d'une relation nouvelle. Or la liaison de deux directions (a, b, c) et (a', b', c') s'exprime par la relation

$$\begin{aligned} &a(a'\alpha + b'\alpha' + c'\alpha'') \\ &+ b(a'\beta + b'\beta' + c'\beta'') + c(a'\gamma + b'\gamma' + c'\gamma'') = k, \end{aligned}$$

qui, grâce aux formules (17), s'écrit

$$(18)\quad \begin{aligned} &(aa' - bb' - cc' - k)\lambda^2 + (-aa' + bb' - cc' - k)\mu^2 \\ &+ (-aa' - bb' + cc' - k)\nu^2 \\ &+ 2(bc' + cb')\mu\nu + 2(ca' + ac')\nu\lambda + 2(ab' + ba')\lambda\mu = 0, \end{aligned}$$

et, réciproquement, toute relation homogène et du second degré entre λ, μ, ν,

$$\varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0,$$

peut être considérée comme traduisant la liaison de deux directions (a, b, c), (a', b', c') : en effet, l'équation (18) contient cinq paramètres dont on peut disposer pour identifier cette équation avec φ.

On apportera une simplification dans le calcul en remarquant que, sans diminuer la généralité, on peut supposer l'équation φ de la forme

$$(19)\qquad A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 = 0.$$

Si, en effet, on se reporte à l'interprétation géométrique bien connue des formules d'O. Rodrigues, on voit que le trièdre de sommet O et qui a

ses axes parallèles à ceux du trièdre $O'x'y'z'$, est symétrique du trièdre $Oxyz$ par rapport à la droite

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu}.$$

L'équation $\varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0$ exprime que cette droite décrit un cône du second ordre. On peut évidemment supposer les axes fixes choisis de telle manière que l'équation de ce cône soit ramenée à la forme (19).

Cela posé, l'identification de (18) et de (19) donne

$$\begin{aligned} aa' - bb' - cc' - k &= A, & bc' + cb' &= 0, \\ -aa' + bb' - cc' - k &= B, & ca' + ac' &= 0, \\ -aa' - bb' + cc' - k &= C, & ab' + ba' &= 0. \end{aligned}$$

On trouve aisément que ce système d'équations admet les *six* solutions suivantes :

1° $a=0$, $b=\sqrt{A-B}$, $c=\sqrt{C-A}$; $a'=0$, $b'=\sqrt{A-B}$, $c'=-\sqrt{C-A}$,

2° $a=0$, $b=\sqrt{A-B}$, $c=-\sqrt{C-A}$; $a'=0$, $b'=\sqrt{A-B}$, $c'=\sqrt{C-A}$,

3° $b=0$, $c=\sqrt{B-C}$, $a=\sqrt{A-B}$; $b'=0$, $c'=\sqrt{B-C}$, $a'=-\sqrt{A-B}$,

4° $b=0$, $c=\sqrt{B-C}$, $a=-\sqrt{A-B}$; $b'=0$, $c'=\sqrt{B-C}$, $a'=\sqrt{A-B}$,

5° $c=0$, $a=\sqrt{C-A}$, $b=\sqrt{B-C}$; $c'=0$, $a'=\sqrt{C-A}$, $b'=-\sqrt{B-C}$,

6° $c=0$, $a=\sqrt{C-A}$, $b=-\sqrt{B-C}$; $c'=0$, $a'=\sqrt{C-A}$, $b'=\sqrt{B-C}$.

Ainsi, dans le cas actuellement étudié, *le fait qu'il existe dans les deux figures un couple de directions liées entraîne l'existence de cinq autres couples analogues.*

Le nombre total des couples de directions liées se réduit de six à cinq, quand deux des quantités A, B, C sont égales.

4° C *est une droite.*

On peut supposer que les équations de C sont

$$\nu = 0, \qquad \rho = 0.$$

On en tire

$$\gamma'' = -1.$$

Ainsi l'axe $O'z'$ est constamment parallèle à l'axe Oz. Dans ces conditions, il est clair *que toute direction de* (F') *est liée à* Oz, *et que toute direction de* (F) *est liée à* $O'z'$.

10. Je résumerai ainsi qu'il suit cette discussion :

1° S'il existe dans les figures (F) et (F') deux couples de directions liées, le point dont les coordonnées homogènes sont $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$ décrit, en général, une biquadratique gauche, et, dans un cas particulier, une cubique gauche.

2° S'il existe dans les figures (F) et (F') plus de deux couples de directions liées, le point $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$ décrit une conique, dont on peut supposer, sans restreindre la généralité, le plan représenté par l'équation

$$\rho = 0.$$

3° S'il existe dans les figures (F) et (F') une infinité de couples de directions liées (ou simplement plus de six), le point $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$ décrit une droite dont on peut supposer les équations ramenées aux formes

$$\nu = 0, \qquad \rho = 0.$$

Dans ce dernier cas, $O'z'$ est constamment parallèle à Oz.

Il serait aisé de définir géométriquement les mouvements qui donnent lieu au cas de la cubique gauche et au cas de la conique ; je ne m'y arrêterai pas.

CHAPITRE III.

Les D. S. de droites.

11. Ainsi que je l'ai rappelé au Chapitre I (3, II, III et IV), la question des D. S. d'une droite se trouve complètement élucidée par les résultats de MM. Darboux, Mannheim et Duporcq, relatifs respectivement aux cas où la courbe fixe F est une droite, une conique, une cubique gauche. Il me semble inutile de reproduire ici les démonstrations des théorèmes II et III, pour lesquels je renvoie aux Ouvrages cités, et qui d'ailleurs rentrent dans le théorème V, qui sera établi au Chapitre IV. J'examinerai donc seulement le cas de la cubique gauche, par une méthode peut-être un peu plus rapide que celle de Duporcq.

La figure (F') étant supposée réduite à l'axe $O'x'$, je ferai, dans l'équation fondamentale (1),

$$y' = 0, \qquad z' = 0, \qquad x' = \rho.$$

Cette équation se réduit ainsi à

$$(20) \qquad \begin{aligned} &\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2x\xi - 2y\eta - 2z\zeta + 2\rho(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\rho) \\ &\quad - 2\rho(x\alpha + y\beta + z\gamma) = h. \end{aligned}$$

A toute valeur de ρ doivent correspondre des valeurs de x, y, z, telles que l'équation précédente soit satisfaite pendant toute la durée du mouvement.

Soient $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ quatre valeurs quelconques de ρ, et $m_i(x_i, y_i, z_i)$ le point de (F) relié au point $m'_i(\rho_i, 0, 0)$ de (F'). Formons les quatre équations (20) correspondantes. Elles sont linéaires par rapport à

$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, ξ, η, ζ, et le déterminant des coefficients

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -x_1 & -y_1 & -z_1 \\ 1 & -x_2 & -y_2 & -z_2 \\ 1 & -x_3 & -y_3 & -z_3 \\ 1 & -x_4 & -y_4 & -z_4 \end{vmatrix}$$

doit être supposé différent de *zéro*. En effet, dans le cas contraire, les quatre points m_1, m_2, m_3, m_4 seraient dans un même plan, et l'on se trouverait dans le cas du théorème III de M. Mannheim.

Cela posé, considérons une cinquième équation analogue : on peut supposer que c'est l'équation (20) même. Nous avons cinq équations linéaires entre $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, ξ, η, ζ, $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$, et le déterminant des coefficients est

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -x & -y & z & \rho \\ 1 & -x_1 & -y_1 & z_1 & \rho_1 \\ 1 & -x_2 & -y_2 & z_2 & \rho_2 \\ 1 & -x_3 & -y_3 & z_3 & \rho_3 \\ 1 & -x_4 & -y_4 & z_4 & \rho_4 \end{vmatrix}.$$

Il y a deux cas à examiner, suivant que D est nul, quels que soient les cinq couples de points liés choisis, ou différent de *zéro*.

12. 1° D *est nul*.

En développant D par rapport aux éléments de la première ligne, on voit que deux points liés quelconques donnent lieu à la relation

$$A\rho + Bx + Cy + Dz + E = 0, \tag{21}$$

où A, B, C, D, E sont des constantes dont la première n'est pas nulle.

Cette relation exprime que ρ est proportionnel à la distance du point m

au plan

$$Bx + Cy + Dz + E = 0.$$

On peut choisir les axes fixes de telle manière que l'équation de ce plan se réduise à

$$z = 0,$$

et la relation (21) se réduit alors à

$$z = K\rho, \tag{22}$$

K étant une nouvelle constante. On voit que ρ et z deviennent simultanément infinis ; il en résulte *que la direction de* $O'x'$ *est liée à celle de* Oz, et que l'on a, par conséquent (n° **6**),

$$\gamma = \text{const.} \tag{23}$$

Récrivons alors l'équation (20), en y remplaçant z par $K\rho$. Il vient, en tenant compte de (23),

$$\begin{aligned} &\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2x\xi - 2y\eta \\ &\quad + 2[\alpha\xi + \beta\eta + (\gamma - K)\zeta]\rho = 2\rho(x\alpha + y\beta) + \text{const.} \end{aligned}$$

Quatre équations analogues sont linéaires par rapport à

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \quad \xi, \quad \eta, \quad \alpha\xi + \beta\eta + (\gamma - K)\zeta,$$

et leur déterminant

$$\| 1 \quad -x \quad -y \quad \rho \| = \frac{1}{K} \| 1 \quad -x \quad -y \quad z \|$$

est différent de *zéro*. On peut donc les résoudre par rapport à ces quatre quantités, qui se présentent alors sous la forme d'expressions linéaires par rapport à α et β.

On est encore obligé ici de distinguer deux cas, suivant que les constantes γ et K sont différentes ou égales.

1° $\gamma - K \neq 0$. On a d'après ce qui a été dit :

$$\xi = a\alpha + b\beta,$$
$$\eta = c\alpha + d\beta$$

(sans termes constants, si l'on choisit convenablement l'origine O), et

$$\alpha\xi + \beta\eta + (\gamma - K)\zeta = (\alpha, \beta),$$

où le second membre représente une forme linéaire. Cette dernière relation conduit pour ζ à une expression de la forme

$$\zeta = l\alpha(a\alpha + b\beta) + m\beta(c\alpha + d\beta), \tag{24}$$

où l'on peut encore supprimer le terme indépendant. Il faut de plus que $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ soit linéaire en α, β, ce qui donne

$$(a\alpha + b\beta)^2 + (c\alpha + d\beta)^2 + [l\alpha(a\alpha + b\beta) + m\beta(c\alpha + d\beta)]^2 = (\alpha, \beta). \tag{25}$$

Cette relation doit être une conséquence de

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 - \gamma^2,$$

car il ne peut exister entre α et β de relation distincte de la précédente.

Il faut donc que, dans la relation (25), l'ensemble des termes du quatrième degré en α, β soit divisible par $\alpha^2 + \beta^2$. Cela exige que le polynome

$$l\alpha(a\alpha + b\beta) + m\beta(c\alpha + d\beta)$$

soit identique, à un facteur constant près, à $\alpha^2 + \beta^2$. On en conclut que la valeur de ζ est constante.

La relation (2) se réduit alors à

$$(a\alpha + b\beta)^2 + (c\alpha + d\beta)^2 = (\alpha, \beta),$$

et le premier membre doit être encore identique, à un facteur constant près, à $\alpha^2 + \beta^2$.

On conclut facilement de là que ξ et η ont des expressions des formes

$$\begin{aligned} \xi &= a(\alpha \cos\theta - \beta \sin\theta) \\ \eta &= a(\alpha \sin\theta + \beta \cos\theta) \end{aligned} \qquad (\theta = \text{const.}).$$

Rappelons qu'on a

$$\zeta = \text{const.}$$

L'interprétation de ces formules est immédiate : *la droite* $O'x'$ *tourne autour de* Oz

$$\gamma - K \neq 0.$$

L'hypothèse nous a ainsi conduit à une solution qui ne présente aucun intérêt.

2° $\gamma - K = 0$. On est encore conduit à poser

$$\xi = a(\alpha \cos\theta - \beta \sin\theta),$$
$$\eta = a(\alpha \sin\theta + \beta \cos\theta).$$

Les coordonnées d'un point $m'(\rho, 0, 0)$ sont

$$\xi = a(\alpha \cos\theta - \beta \sin\theta) + \rho\alpha, \tag{26}$$
$$\eta = a(\alpha \sin\theta + \beta \cos\theta) + \rho\beta. \tag{27}$$

Si l'on transporte l'origine O′ au point tel que

$$\rho + a \cos\theta = 0,$$

les formules qui expriment ξ, η se simplifient et se réduisent à

$$\xi = - a\beta \sin\theta = - A\beta,$$
$$\eta = a\alpha \sin\theta = A\alpha,$$

en posant

$$A = a \sin\theta.$$

On a en plus

$$\zeta^2 = l\alpha + m\beta + n. \tag{28}$$

Les formules (26), (27) et (28) définissent un D. S. de droite que j'étudierai plus complètement au Chapitre VI, à l'occasion du D. S. d'espace.

13. 2° D *est différent de zéro.*

Dans ce cas, les cinq quantités

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \quad \xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$$

sont toutes de la forme (α, β, γ) [1].

Posons

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= A\,\alpha + B\,\beta + C\,\gamma, \\ \eta &= A'\alpha + B'\beta + C'\gamma, \\ \zeta &= A''\alpha + B''\beta + C''\gamma, \end{aligned}\right. \tag{29}$$

en supposant toujours l'origine choisie de telle manière que les expressions précédentes ne contiennent pas de termes indépendants. Écrivons les relations

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = (\alpha, \beta, \gamma), \tag{30}$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = (\alpha, \beta, \gamma), \tag{31}$$

en y remplaçant ξ, η et ζ par leurs expressions (29). Les deux relations ainsi obtenues représentent deux quadriques, si l'on y considère α, β, γ

---

[1] Par la notation $(x, y, z, \ldots)$, qui a déjà été employée plus haut, je désigne une expression de la forme $Ax + By + Cz + \ldots + H$, où A, B, C, ..., H sont des constantes.

comme des coordonnées. Soit C leur courbe d'intersection : elle doit appartenir, en totalité ou en partie, à la quadrique

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1=0. \tag{32}$$

La courbe commune aux trois quadriques ne peut être une *cubique gauche* ou une *droite,* du moins dans le cas des D. S. réels : en effet, la quadrique (32) ne contient pas de droite ou de cubique gauche réelles.

Si cette courbe est une conique, il existe entre α, β et γ une relation linéaire. Cette relation peut être ramenée, par un changement de coordonnées, à la forme

$$\gamma = \text{const.},$$

et nous retombons dans le cas examiné au n° **12**.

Il faut donc en conclure que C est une *biquadratique gauche* non décomposée et que les quadriques (30), (31) et (32) forment un faisceau ; il en est de même, en particulier, de leurs cônes asymptotiques. On doit donc pouvoir trouver trois nombres λ, μ, ν, non tous nuls, tels que l'on ait l'identité

$$\begin{aligned}&\lambda[(A\alpha+B\beta+C\gamma)^2+(A'\alpha+B'\beta+C'\gamma)^2+(A''\alpha+B''\beta+C''\gamma)^2]\\&+\mu[\alpha(A\alpha+B\beta+C\gamma)+\beta(A'\alpha+B'\beta+C'\gamma)+\gamma(A''\alpha+B''\beta+C''\gamma)]\\&+\nu(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0.\end{aligned}$$

Écrivons les conditions de cette identité :

$$\lambda(A^2+A'^2+A''^2)+\mu A+\nu=0, \tag{33}$$

$$\lambda(B^2+B'^2+B''^2)+\mu B'+\nu=0, \tag{34}$$

$$\lambda(C^2+C'^2+C''^2)+\mu C''+\nu=0, \tag{35}$$

$$2\lambda(BC+B'C'+B''C'')+\mu(C'+B'')=0, \tag{36}$$

$$2\lambda(CA+C'A'+C''A'')+\mu(A''+C)=0, \tag{37}$$

$$2\lambda(AB+A'B'+A''B'')+\mu(B+A')=0. \tag{38}$$

Il y a deux hypothèses à examiner, suivant que, des trois quantités

$$C' + B'', \quad A'' + C, \quad B + A',$$

l'une au moins est différente de *zéro,* ou suivant que ces trois quantités sont nulles.

14. *Première hypothèse.* — $C' + B''$, par exemple, est différent de *zéro*.

Les coordonnées d'un point quelconque de $O'x'$ sont données par les formules

$$\begin{aligned} \xi &= (A+\rho)\alpha + B\beta + C\gamma, \\ \eta &= A'\alpha + (B'+\rho)\beta + C'\gamma, \\ \zeta &= A''\alpha + B''\beta + (C''+\rho)\gamma. \end{aligned}$$

Il existe une valeur finie de ρ telle que l'on ait

$$BC + (B'+\rho)C' + B''(C''+\rho) = 0,$$

puisque le coefficient de ρ dans cette relation, $C' + B''$, est différent de *zéro* par hypothèse.

Nous supposerons l'origine O' transportée au point qui correspond à cette valeur de ρ. Autrement dit, nous supposerons que, dans les formules (29), on a

$$(39) \qquad BC + B'C' + B''C'' = 0.$$

La relation (39) donne alors

$$\mu = 0,$$

et les relations (37) et (38) se réduisent à

$$(40) \qquad CA + C'A' + C''A'' = 0,$$

$$(41) \qquad AB + A'B' + A''B'' = 0,$$

car on ne peut évidemment avoir $\lambda = 0$ en même temps que $\mu = 0$.

Enfin, les relations (33), (34), (35) deviennent

$$A^2 + A'^2 + A''^2 = -\frac{\nu}{\lambda}, \tag{42}$$

$$B^2 + B'^2 + B''^2 = -\frac{\nu}{\lambda}, \tag{43}$$

$$C^2 + C'^2 + C''^2 = -\frac{\nu}{\lambda}. \tag{44}$$

Les relations (39) à (44) montrent *que* A, B, ..., C″ *sont les coefficients d'une substitution orthogonale, à un facteur constant près*. On peut donc écrire

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= K(\alpha_0\alpha + \beta_0\beta + \gamma_0\gamma), \\ \eta &= K(\alpha'_0\alpha + \beta'_0\beta + \gamma'_0\gamma), \\ \zeta &= K(\alpha''_0\alpha + \beta''_0\beta + \gamma''_0\gamma), \end{aligned}\right. \tag{45}$$

où α_0, β_0, ..., γ''_0 sont les cosinus directeurs des trois arêtes d'un trièdre trirectangle. K est une constante.

On peut encore simplifier les formules (45). Remarquons, à cet effet, que la courbe (F) possède au moins une direction asymptotique réelle, et qu'il existe sur $O'x'$ un point ω' (à distance finie), lié au point qui est rejeté à l'infini dans cette direction asymptotique. Ce point ω' décrit un plan qu'on peut supposer avoir pour équation

$$z = h.$$

On a donc, pour une valeur finie de ρ,

$$\zeta - \gamma\rho = K(\alpha''_0\alpha + \beta''_0\beta + \gamma''_0\gamma) + \rho\gamma = h.$$

Cette relation, étant linéaire en α, β et γ, doit être identiquement satisfaite. On a donc

$$\alpha''_0 = \beta''_0 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \gamma''_0 = 1, \qquad \gamma_0 = \gamma'_0 = 0,$$

et les formules (45) se réduisent à

$$(46)\qquad \begin{cases} \xi = K(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta), \\ \eta = K(-\alpha\sin\theta + \beta\cos\theta), \\ \zeta = K\gamma, \end{cases}$$

où l'angle θ est constant.

On tire des formules (46)

$$(47)\qquad \begin{aligned} \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta &= K\cos\theta(\alpha^2 + \beta^2) + K\gamma^2 \\ &= K\cos\theta + K(1 - \cos\theta)\gamma^2, \end{aligned}$$

$$(48)\qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = K^2.$$

Enfin la relation (30) montre qu'il doit exister, entre α, β, γ, une relation de la forme

$$K\cos\theta + K(1 - \cos\theta)\gamma^2 = (\alpha, \beta, \gamma),$$

ou plus simplement

$$\gamma^2 = (\alpha, \beta, \gamma).$$

Il est aisé de voir qu'en faisant tourner les axes Ox et Oy, sans changer Oz, on ne modifie pas la forme des formules (46), et que l'on peut annuler le coefficient de β dans le second membre de la relation précédente. J'écrirai définitivement

$$(49)\qquad \gamma^2 = A\alpha + B\gamma + C.$$

Les relations (46) et (49) définissent complètement le mouvement de $O'x'$. Il est facile de reconnaître que ce mouvement est bien un D. S.; autrement dit qu'à toute valeur de ρ on peut faire correspondre un système de valeurs de x, y, z, telles que la relation (20) soit satisfaite pendant toute la durée du mouvement. Cette relation, en tenant compte

de (47) et (48), se réduit à

$$-2Kx(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta)-2Ky(-\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta)-2Kz\gamma$$
$$+2K(1-\cos\theta)\rho\gamma^2-2\rho(x\alpha+y\beta+z\gamma)=\text{const.}$$

Cette relation doit être identique à (49). On forme sans peine les conditions pour qu'il en soit ainsi et, en résolvant par rapport à x, y, z, il vient

$$(50)\qquad\begin{cases} x=\dfrac{AK(1-\cos\theta)(K\cos\theta+\rho)\rho}{K^2+2K\rho\cos\theta+\rho^2}, \\ y=\dfrac{-AK^2(1-\cos\theta)\rho\sin\theta}{K^2+2K\rho\cos\theta+\rho^2}, \\ z=\dfrac{BK(1-\cos\theta)\rho}{K+\rho}. \end{cases}$$

Ces équations représentent, quand on y fait varier ρ, une cubique gauche ayant une asymptote parallèle à Oz et ses deux autres asymptotes parallèles aux directions isotropes du plan Oxy.

On trouvera au n° **10** du Mémoire de Duporcq une interprétation géométrique élégante des formules (46) et (49). Il est inutile d'insister ici sur ce D. S., qui se représentera au Chapitre VI.

15. *Deuxième hypothèse. — Les trois quantités* $C'+B''$, $A''+C$, $B+A'$ *sont nulles.*

Il est clair que le calcul développé au n° **14** est ici inapplicable.

Je récris les formules (29), en changeant les notations

$$(51)\qquad\begin{cases} \xi=\ A\alpha-B''\beta+B'\gamma, \\ \eta=\ B''\alpha+A'\beta-B\gamma, \\ \zeta=-B'\alpha+B\beta+A''\gamma. \end{cases}$$

On a

$$\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta=A\alpha^2+A'\beta^2+A''\gamma^2,$$

et, en écrivant que les cônes asymptotiques des quadriques (30), (31), (32) forment un faisceau, on trouve les conditions

$$\lambda(A^2 + B''^2 + B'^2) + A\mu + \nu = 0, \tag{52}$$

$$\lambda(B''^2 + A'^2 + B^2) + A'\mu + \nu = 0, \tag{53}$$

$$\lambda(B'^2 + B^2 + A''^2) + A''\mu + \nu = 0, \tag{54}$$

$$\lambda(-B'B'' - A'B + A''B) = 0, \tag{55}$$

$$\lambda(-B''B - A''B' + AB') = 0, \tag{56}$$

$$\lambda(-BB' - AB'' + A'B'') = 0. \tag{57}$$

Il faut examiner deux cas, suivant que λ est nul ou différent de *zéro*.

1° λ *est nul.*

Les équations (55), (56) et (57) sont satisfaites, et l'on tire des équations (52), (53) et (54)

$$A = A' = A'' = -\frac{\nu}{\mu}.$$

On peut dès lors simplifier les formules (51), en transportant l'origine O′ au point dont les coordonnées sont

$$\xi - A\alpha, \quad \eta - A\beta, \quad \zeta - A\gamma.$$

Il vient ainsi

$$\xi = B'\gamma - B''\beta,$$
$$\eta = B''\alpha - B\gamma,$$
$$\zeta = B\beta - B'\alpha.$$

Ces relations expriment que le vecteur dont les composantes sont ξ, η, ζ est le *produit vectoriel* des vecteurs (B, B', B'') et (α, β, γ). On peut changer les axes Ox, Oy, Oz, de manière que le dernier soit dirigé suivant Oz. Cela revient à faire, dans les formules précédentes, $B = B' = 0$,

et l'on a

$$(58)\qquad \begin{cases} \xi = -B''\beta, \\ \eta = B''\alpha, \\ \zeta = 0. \end{cases}$$

Les relations (58), jointes à la suivante

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = B''^2(\alpha^2 + \beta^2) = B''^2 - B''^2\gamma^2 = (\alpha, \beta, \gamma),$$

ou, plus simplement,

$$\gamma^2 = (\alpha, \beta, \gamma),$$

définissent un nouveau D. S. de la droite $O'x'$. En procédant comme au n° **14**, on trouve que cette droite est liée à la cubique gauche représentée par le système

$$(58)\qquad x = \frac{K\rho - B''l}{\rho^2 + B''^2}, \qquad y = \frac{l\rho + B''K}{\rho^2 + B''^2}, \qquad z = \frac{m}{\rho},$$

l, m, n désignant des constantes. Je renvoie encore au Mémoire de Duporcq (n° **14**) pour une étude plus détaillée de ce D. S.

2° λ *est différent de zéro.*

Alors les relations (55), (56) et (57) se réduisent à

$$(59)\qquad -B'B'' - A'B + A''B = 0,$$

$$(60)\qquad -B''B - A''B' + AB' = 0,$$

$$(61)\qquad -BB' - AB'' + A'B'' = 0.$$

Si $BB'B'' \neq 0$, on tire des relations précédentes, en les multipliant respectivement par $B'B''$, $B''B$, BB' et en les ajoutant,

$$B'^2B''^2 + B''^2B^2 + B^2B'^2 = 0;$$

cette relation ne pourrait convenir qu'à un mouvement imaginaire

Supposons donc $BB'B''=0$, par exemple $B=0$. On tire alors de (59)

$$B'B''=0.$$

Supposons, par exemple,

$$B'=0.$$

Les relations (59) et (60) sont alors satisfaites et (61) se réduit à

$$B''(A-A')=0,$$

ce qui exige, soit

$$B''=0,$$

soit

$$A-A'=0.$$

Si B'' est nul, les relations (52), (53) et (54) se réduisent à

$$\lambda A^2 + \mu A + \nu = 0,$$
$$\lambda A'^2 + \mu A' + \nu = 0,$$
$$\lambda A''^2 + \mu A'' + \nu = 0,$$

et, comme λ, μ, ν ne sont pas tous les trois nuls, deux des quantités A, A', A'' sont forcément égales entre elles.

On voit, en résumé, que nous pouvons supposer

$$B=B'=0, \qquad A=A',$$

ce qui réduit les formules (51) à

$$\xi = A\alpha - B''\beta,$$
$$\eta = B''\alpha + A\beta,$$
$$\zeta = A''\gamma.$$

Il est aisé de voir que ces relations conduisent au même D. S. que celui qui a été obtenu au n° **14**.

Le problème des D. S. de droites se trouve ainsi complètement résolu.

CHAPITRE IV.

Les D. S. inconditionnels.

16. Ecrivons les équations de liaison auxquelles donnent lieu six couples de points (m_i, m_i) $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ des figures (F) et (F'),

$$(62)\quad \begin{aligned} &\xi^2+\eta^2+\zeta^2-2x_i\xi-2y_i\eta-2z_i\zeta+2x'_i(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta)\\ &+2y'_i(\alpha'\xi+\beta'\eta+\gamma'\zeta)+2z'_i(\alpha''\xi+\beta''\eta+\gamma''\zeta)\\ &-2x_ix'_i\alpha-2x_iy'_i\alpha'-2x_iz'_i\alpha''-2y_ix'_i\beta-2y_iy'_i\beta'\\ &\qquad-2y_iz'_i\beta''-2z_ix'_i\gamma-2z_iy'_i\gamma'-2z_iz'_i\gamma''=h_i \end{aligned}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6),$$

où

$$h_i = d_i^2 - x_i^2 - y_i^2 - z_i^2 - x_i'^2 - y_i'^2 - z_i'^2.$$

Formons la matrice suivante, de six lignes et de seize colonnes,

$$(63)\quad \| 1\ \ x_i\ \ y_i\ \ z_i\ \ x'_i\ \ y'_i\ \ z'_i\ \ x_ix'_i\ \ x_iy'_i\ \ x_iz'_i\ \ y_ix'_i\ \ y_iy'_i\ \ y_iz'_i\ \ z_ix'_i\ \ z_iy'_i\ \ z_iz'_i \|,$$

et supposons que tous les déterminants de six lignes qu'elle renferme soient nuls. On pourra alors trouver six quantités non toutes nulles λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, λ_6, telles qu'en ajoutant les six relations (62), multipliées respectivement par ces quantités, le premier membre de la relation obtenue soit identiquement nul. On a donc entre les six quantités h_i la relation

$$(63)\quad \sum \lambda_i h_i = 0,$$

où les λ_i sont fonctions de $x_1, y_1, z_1, \ldots, x'_6, y'_6, z'_6$.

Il résulte de la relation (63) que, si l'on déplace la figure (F') de

manière à satisfaire aux cinq premières des relations (62), où h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 ont des valeurs données *quelconques*, la quantité h_6, définie par la sixième de ces relations, est aussi constante. Autrement dit, il existe un D. S. où les figures liées sont constituées respectivement par les systèmes de points $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6)$ et $(m'_1, m'_2, m'_3, m'_4, m'_5, m'_6)$, *et ce* D. S. *est possible en donnant à la figure* (F') *une position initiale quelconque,* la figure (F) étant supposée fixe.

Je dirai d'un tel D. S., où les figures peuvent être liées à partir d'une position relative quelconque, qu'il est *inconditionnel.*

17. Pour trouver un D. S. inconditionnel, il faut obtenir un système de points (m_i, m'_i), tels que tous les déterminants de la matrice (63) soient nuls.

On obtient une première solution en posant

$$x = \frac{P(t)}{S(t)}, \quad y = \frac{Q(t)}{S(t)}, \quad z = \frac{R(t)}{S(t)}, \tag{64}$$

$$x' = \frac{P'(t)}{S'(t)}, \quad y' = \frac{Q'(t)}{S'(t)}, \quad z' = \frac{R'(t)}{S'(t)}, \tag{65}$$

P, Q, R, S, P', Q', R', S' désignant des polynomes quelconques du second degré en t, et en faisant $x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i$ égaux aux valeurs que prennent x, y, z, x', y', z' pour six valeurs quelconques t_i de t $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

En effet, il est visible que, dans ces conditions, l'un quelconque des déterminants (63) est de la forme

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{i=6} S(t_i)S'(t_i)} \begin{vmatrix} A_1(t_1) & A_2(t_1) & A_3(t_1) & A_4(t_1) & A_5(t_1) & A_6(t_1) \\ A_1(t_2) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1(t_3) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1(t_4) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1(t_5) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1(t_6) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

où $A_h(t)$ est un polynome du quatrième degré en t. Or, le déterminant qui figure dans l'expression précédente est nul : il existe en effet entre six polynomes quelconques du quatrième degré $A_1(t), \ldots, A_6(t)$ une relation identique de la forme

$$\sum_{h=1}^{h=6} \mu_h A_h(t) = 0,$$

où les coefficients μ_h sont des constantes.

L'interprétation géométrique de ce résultat est immédiate : en effet, si l'on fait varier t dans les formules (64) et (65), les points $m(x, y, z)$ et $m'(x', y', z')$ décrivent deux coniques C et C', et sont homologues dans une correspondance homographique établie entre ces deux coniques. Les coniques C et C' et la correspondance homographique sont quelconques, les polynomes P, Q, R, S, P', Q', R', S' pouvant être choisis arbitrairement.

Nous sommes donc conduits au théorème V du n° **3**.

Ce théorème contient comme cas particuliers les théorèmes II et III, ainsi que je l'ai fait remarquer. On obtient un autre cas particulier assez intéressant en faisant les hypothèses suivantes :

1° Les coniques C et C' sont deux cercles;

2° La correspondance homographique établie entre ces deux cercles est une similitude;

3° A l'origine du mouvement, les plans des deux cercles sont parallèles.

On peut alors démontrer que, pendant toute la durée du mouvement, les plans des deux cercles ne cessent pas d'être parallèles et que, à tout moment, les droites qui joignent les points liés font partie d'un même hyperboloïde. Ce D. S. particulier peut enfin être rattaché à la déformation d'un quadrilatère articulé plan *rhomboïdal* [1].

---

[1] *Voir* ma Note : *Étude géométrique d'un déplacement remarquable et d'un hyperboloïde articulé* (*Bulletin de la Soc. math. de France,* 1897, p. 98).

18. Abordons maintenant le problème général posé au début du n° **17**. Les conditions à remplir peuvent s'écrire symboliquement

$$(66)\quad \| \; xx' \;\; xy' \;\; xz' \;\; xt' \;\; yx' \;\; yy' \;\; yz' \;\; yt' \;\; zx' \;\; zy' \;\; zz' \;\; zt' \;\; tx' \;\; ty' \;\; tz' \;\; tt' \; \|_{(6)} = 0,$$

en introduisant les coordonnées homogènes $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ et $\frac{x'}{t'}, \frac{y'}{t'}, \frac{z'}{t'}$.

Observons que les conditions (66) ne changent pas de forme si l'on effectue une transformation homographique *portant seulement sur les points* m' et définie par les formules

$$\begin{aligned} x' &= l_1 X' + m_1 Y' + n_1 Z' + p_1 T', \\ y' &= l_2 X' + \ldots, \\ z' &= l_3 X' + \ldots, \\ t' &= l_4 X' + \ldots. \end{aligned}$$

En effet, si dans la matrice (66) on remplace x', y', z', t' par les valeurs précédentes, chaque terme de cette matrice prend une forme telle que

$$x(l_1 X' + m_1 Y' + n_1 Z' + p_1 T') = l_1 x X' + m_1 x Y' + n_1 x Z' + p_1 x T',$$

et, par des combinaisons linéaires de colonnes, on ramène aisément les relations (66) à la forme

$$\| \; xX' \quad xY' \quad \ldots \quad tT' \; \|_{(6)} = 0,$$

c'est-à-dire à la forme initiale, où x', y', z', t' sont simplement remplacés par X', Y', Z', T'. On obtient donc le résultat suivant :

Si $(m_1, m_2, \ldots, m_6)$ *et* $(m'_1, m'_2, \ldots, m'_6)$ *sont deux systèmes de six points qui peuvent être liés dans un* D. S. *inconditionnel, il en est de même des deux systèmes* $(m_1, \ldots, m_6)$ *et* $(M'_1, \ldots, M'_6)$, *dont le dernier dérive de* $(m'_1, \ldots, m'_6)$ *par une transformation homographique quelconque.*

Ce théorème permet de supposer que $x, y, z, t, x', y', z', t'$ désignent, dans les relations (66), des coordonnées tétraédrales. Il conduit ainsi à une simplification notable du problème.

Supposons en effet, d'abord, que parmi les points $m_1, \ldots, m_6$ on puisse en trouver cinq dont quatre quelconques n'appartiennent pas à un même plan, et que les cinq points homologues m' présentent la même disposition. Ces points seront, par exemple, $m_1, m_2, \ldots, m_5$ dans le premier système et $m'_1, m'_2, \ldots, m'_5$ dans le second.

On peut alors déterminer une transformation homographique qui fasse correspondre, aux points $m'_1, \ldots, m'_5$, respectivement les points $m_1, \ldots, m_5$. Soit M'_6 l'homologue de m'_6.

En appliquant le théorème qui vient d'être démontré, on voit que les relations (66) doivent être satisfaites par les six couples

$$(m_1, m_1), \quad (m_2, m_2), \quad (m_3, m_3), \quad (m_4, m_4), \quad (m_5, m_5), \quad (m_6, M'_6).$$

Prenons, comme tétraèdre de référence, celui qui a pour sommets les points m_1, m_2, m_3, m_4. On peut supposer, sans diminuer la généralité, que le point m_5 a pour coordonnées $(1, 1, 1, 1)$. Soient enfin (x, y, z, t) et (x', y', z', t') les coordonnées des points m_6, M'_6.

Avec ces hypothèses, les relations (66) s'écrivent

$$\left\|\begin{matrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
xx' & xy' & xz' & xt' & yx' & yy' & yz' & yt' & zx' & zy' & zz' & zt' & tx' & ty' & tz' & tt'
\end{matrix}\right\|_{(6)} = 0.$$

Ces relations, au nombre de 11, se réduisent à

$$xy' = xz' = xt' = yx' = yz' = yt' = zx' = zy' = zt' = tx' = ty' = tz',$$

et l'on voit sans peine qu'elles ne peuvent être satisfaites que si les

points m_6 et M'_6 vont tous deux se confondre avec l'un des points m_1, $m_2, \ldots, m_5$.

Ainsi, dans l'hypothèse faite sur les dispositions présentées par les points m et par les points m', on ne peut trouver deux systèmes de six points distincts donnant une solution du problème.

19. Les points m et m' peuvent présenter d'autres dispositions pour lesquelles les considérations précédentes ne s'appliquent plus; par exemple, les points m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 étant toujours tels que quatre d'entre eux ne soient pas dans un même plan, les points m'_1, m'_2, m'_3, m'_4 sont bien les sommets d'un véritable tétraèdre, mais le point m'_5 est dans le plan m'_2, m'_3, m'_4 : la transformation homographique dont j'ai fait usage cesse dès lors d'exister.

Il serait fastidieux d'examiner tous les cas qui peuvent se présenter, et auxquels il est d'ailleurs facile d'appliquer, avec des modifications convenables, le raisonnement du n° **18**. Je me bornerai à étudier le suivant :

Les points m sont dans un même plan, ainsi que tous les points m'.

Nous pouvons faire $t = t' = 0$ dans les relations (66). Sept de ces relations sont alors satisfaites d'elles-mêmes, et les autres se réduisent à

$$(67) \qquad \| xx' \quad xy' \quad xz' \quad yx' \quad yy' \quad yz' \quad zx' \quad zy' \quad zz' \|_{(6)} = 0.$$

Étant donnés les cinq couples (m_1, m'_1), (m_2, m'_2), $\ldots$, (m_5, m'_5), *on peut déterminer le sixième couple* (m_6, m'_6), *de telle manière que les relations* (67) *soient satisfaites*. Ces relations sont en effet au nombre de *quatre* et l'on dispose des quatre coordonnées $\frac{x_6}{z_6}, \frac{y_6}{z_6}, \frac{x'_6}{z'_6}, \frac{y'_6}{z'_6}$.

Je vais démontrer que ce couple, (m_6, m'_6), est en général unique, et chercher à le construire géométriquement.

Explicitons, à cet effet, les quatre relations (67). L'une d'elles est,

par exemple,

$$\begin{vmatrix} x_1 x'_1 & x_1 y'_1 & x_1 z'_1 & y_1 x'_1 & y_1 y'_1 & y_1 z'_1 \\ x_2 x'_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_3 x'_3 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_4 x'_4 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_5 x'_5 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_6 x'_6 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

qui, développée par rapport aux éléments de la dernière ligne, est de la forme

$$(68) \quad X_1(x_6, y_6, z_6)x'_6 + Y_1(x_6, y_6, z_6)y'_6 + Z_1(x_6, y_6, z_6)z'_6 = 0,$$

où $X_1(x, y, z)$, $Y_1(x, y, z)$, $Z_1(x, y, z)$ désignent des expressions linéaires et homogènes en x, y, z.

La relation précédente est visiblement satisfaite par les systèmes x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Les trois autres relations (67) sont de la même forme que (68) et sont satisfaites par les mêmes systèmes x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i. Le problème se pose donc, en définitive, sous la forme suivante :

On donne les quatre équations

$$(69) \quad X_1 x' + Y_1 y' + Z_1 z' = 0,$$

$$(70) \quad X_2 x' + Y_2 y' + Z_2 z' = 0,$$

$$(71) \quad X_3 x' + Y_3 y' + Z_3 z' = 0,$$

$$(72) \quad X_4 x' + Y_4 y' + Z_4 z' = 0,$$

où X_1, Y_1, Z_1, ..., X_4, Y_4, Z_4 *sont des expressions linéaires et homogènes en* x, y, z. *Démontrer que ces équations admettent six systèmes de solutions en* $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$. *Construire l'un de ces systèmes, connaissant les cinq autres.*

La première partie du problème se traite aisément; en effet, en éliminant x', y', z', entre les équations (69), (70), (71), (72), prises deux à deux, on obtient les relations

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 \end{vmatrix} = 0,$$

qui représentent quatre courbes du troisième ordre, dont les points communs ont pour coordonnées les valeurs cherchées de x, y, z. Ces points sont, en général, au nombre de *six* seulement. En effet, les deux premières cubiques se coupent en neuf points, au nombre desquels se trouvent les trois points communs aux coniques

$$Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2 = 0, \qquad Z_1 X_2 - X_1 Z_2 = 0, \qquad X_1 Y_2 - Y_1 X_2 = 0.$$

Ces trois points n'appartiennent pas aux deux dernières cubiques, qui contiennent, au contraire, les six premiers.

20. Pour résoudre la seconde partie du problème, j'utiliserai quelques théorèmes classiques relatifs aux cubiques planes et aux *transformations birationnelles quadratiques* du plan, et que je vais rappeler ici pour plus de netteté.

1° Soit C une cubique plane (sans point double). On peut exprimer les coordonnées de l'un quelconque de ses points en fonctions elliptiques d'un argument et la représentation peut être faite de telle manière que les arguments de trois points en ligne droite aient toujours une somme nulle, à une période près.

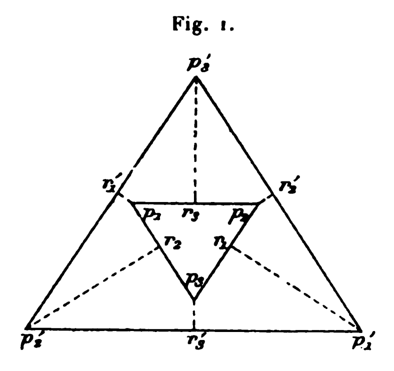
2° Si C et C′ sont deux cubiques planes entre lesquelles on établit une

correspondance birationnelle (pour qu'on puisse le faire, il est nécessaire et suffisant que les deux courbes aient même invariant absolu), les arguments μ et μ' de deux points correspondants sont reliés par la relation

$$(73) \qquad \mu = \mu' + k \quad (^1);$$

3° Soit T une transformation birationnelle quadratique dont les deux *triangles fondamentaux* sont $p_1 p_2 p_3$ et $p'_1 p'_2 p'_3$ (au point p_1 correspondent tous les points de $p'_2 p'_3$, au point p'_1 correspondent tous les points de $p_2 p_3$, etc.). T transforme toute cubique C qui contient les points p_1, p_2, p_3 en une cubique C' qui contient les points p'_1, p'_2, p'_3. Si, de plus, on désigne par r_1, r_2, r_3 les points autres que p_1, p_2, p_3, où C rencontre les côtés du triangle $p_1 p_2 p_3$, par r'_1, r'_2, r'_3 les points analogues relatifs à C', T fait se correspondre les points p_i, r'_i et r_i, p'_i. Ces relations sont indiquées par le schéma suivant :

Fig. 1.



Il est facile de former une relation entre les arguments des points p_1,

---

(1) A la vérité, on pourrait avoir aussi $\mu + \mu' = k$. On ramènera cette relation à l'autre, en prenant comme argument, sur la courbe C', $-\mu'$ au lieu de μ'.

On sait encore que certaines classes de cubiques, les *cubiques harmoniques* et les *cubiques équianharmoniques,* donnent lieu à une autre espèce de correspondance birationnelle, les arguments u et u' de deux points homologues étant liés, suivant le cas, par l'une ou l'autre des relations

$$u = iu', \qquad u = \omega u',$$

où ω désigne une racine cubique imaginaire de l'unité. Je suppose que les cubiques envisagées n'appartiennent à aucune de ces deux classes.

p_2, p_3. Désignons, à cet effet, par ϖ_i, ϖ'_i, ρ_i, ρ'_i les arguments respectifs des points p_i, p'_i, r_i, r'_i. On a les relations

$$\varpi_1 + \rho_3 + \varpi_2 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \rho_3 = -\varpi_1 - \varpi_2,$$

$$\varpi_1 + \rho_2 + \varpi_3 = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \rho_2 = -\varpi_1 - \varpi_3,$$

et, par suite,

$$\varpi'_3 = \rho_3 + k = -\varpi_1 - \varpi_2 + k,$$

$$\varpi'_2 = \rho_2 + k = -\varpi_1 - \varpi_3 + k,$$

d'où enfin

$$0 = \varpi'_3 + \rho'_1 + \varpi'_2 = -\varpi_1 - \varpi_2 + k + \varpi_1 + k - \varpi_1 - \varpi_3 + k,$$

ce qui se réduit à

$$(74) \qquad \varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 = 3k;$$

4° J'établirai enfin la proposition suivante :

Soient m et m' deux points variables sur les courbes C *et* C', *leurs arguments étant reliés par la relation*

$$\mu' = \mu + k,$$

et soient sur les mêmes courbes deux points fixes a et a', dont les arguments α et α' satisfont à la relation

$$\alpha' = \alpha - 2k.$$

Les droites am et $a'm'$ engendrent deux faisceaux homographiques.

Il suffit d'établir qu'à une droite am ne correspond qu'une droite $a'm'$. Or, désignons par n le troisième point de rencontre de C et de am, et par ν son argument. On a

$$\nu = -\alpha - \mu,$$

d'où l'on tire

$$(\nu + k) + (\mu + k) + (\alpha - 2k) = 0,$$

ce qui prouve que la droite joignant le point a' au point n' de C, dont l'argument est $\nu + k$, se confond avec $a'm'$. La proposition est ainsi démontrée.

21. Cela posé, désignons par C la cubique

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Les points $m_1, m_2, \ldots, m_6$ appartiennent à la cubique C, comme on l'a vu au n° **19**. Je désignerai leurs arguments elliptiques par $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_6$ [1].

On tire des relations (69) et (70)

$$(75) \qquad \frac{x'}{Y_1Z_2 - Z_1Y_2} = \frac{y'}{Z_1X_2 - X_1Z_2} = \frac{z'}{X_1Y_2 - Y_1X_2}.$$

Les formules (75) définissent une transformation quadratique T, dont un des triangles fondamentaux a pour sommets les trois points p_1, p_2, p_3, communs aux coniques

$$Y_1Z_2 - Z_1Y_2 = 0, \qquad Z_1X_2 - X_1Z_2 = 0, \qquad X_1Y_2 - Y_1X_2 = 0.$$

Or ces trois points appartiennent, on l'a vu, à C. Les formules (75) font donc correspondre à C une certaine cubique C', qui contient les

---

[1] Je suppose que C n'a pas de point double. Dans le cas contraire, on introduirait, au lieu d'arguments elliptiques, des arguments rationnels t tels qu'on ait, pour trois points en ligne droite,

$$\text{soit} \quad \Sigma \log t = 0, \qquad \text{soit} \quad \Sigma t = 0.$$

Les résultats ne seraient pas modifiés.

points $m'_1, m'_2, \ldots, m'_6$. Soient $\mu'_1, \mu'_2, \ldots, \mu'_6$ les arguments de ces points. On a

$$\mu'_1 - \mu_1 = \mu'_2 - \mu_2 = \ldots = \mu'_6 - \mu_6 = k,$$

k désignant une certaine constante.

On a donc, entre les arguments $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$, des points p_1, p_2, p_3, la relation (74).

Mais les points p_1, p_2, p_3 constituent, avec les points $m_1, m_2, \ldots, m_6$, les points communs à C et à la cubique

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 \end{vmatrix} = 0;$$

on a donc

$$\varpi_1 + \varpi_2 + \varpi_3 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + \mu_6 = 0,$$

d'où enfin, en tenant compte de (74),

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 + \mu_6 = -3k. \tag{76}$$

Si, réciproquement, les arguments de six points de C, $m_1, m_2, \ldots, m_6$ satisfont à la relation (76), ces six points et ceux qui leur correspondent sur la cubique C′ dans la transformation définie par la relation (73) satisfont aux conditions du problème. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Soient C *et* C′ *deux cubiques planes, ayant même invariant absolu, entre lesquelles on établit une correspondance birationnelle définie par la relation entre arguments elliptiques*

$$\mu' = \mu + k.$$

Désignons par $m_1, m_2, \ldots, m_6$ six points de C *dont les arguments*

satisfont à la relation

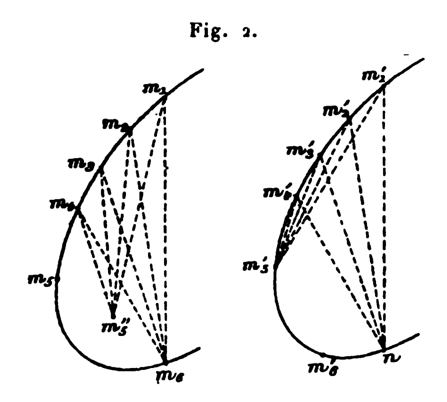
$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_6 = -3k,$$

et soient $m'_1, m'_2, \ldots, m'_6$ *les points correspondants de* C'. *Les figures constituées par ces deux sextuples de points peuvent être liées dans un* D. S. *inconditionnel.*

22. Il reste à indiquer la construction du couple (m_6, m'_6), connaissant les cinq couples $(m_1, m'_1), \ldots, (m_5, m'_5)$.

A cet effet, désignons par n le sixième point d'intersection de la

Fig. 2.



cubique C' par la conique qui contient les points $m'_1, m'_2, m'_3, m'_4, m'_5$; et soit ν l'argument du point n.

On a

$$\nu = -\mu'_1 - \mu'_2 - \mu'_3 - \mu'_4 - \mu'_5 = -(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5) - 5k,$$

d'où, en vertu de la relation (76),

$$\nu = \mu_6 - 2k.$$

On en conclut, en vertu du théorème énoncé à la fin du n° 20, l'égalité entre rapports anharmoniques

$$m_6(m_1 m_2 m_3 m_4) = n(m'_1 m'_2 m'_3 m'_4) = m'_5(m'_1 m'_2 m'_3 m'_4).$$

Cela posé, il existe une transformation homographique qui fait correspondre aux points m'_1, m'_2, m'_3, m'_4 les points m_1, m_2, m_3, m_4, respectivement. Soit m''_5 le point qui correspond à m'_5, dans cette transformation. On a

$$m''_5(m_1 m_2 m_3 m_4) = m'_5(m'_1 m'_2 m'_3 m'_4),$$

d'où enfin

$$m''_5(m_1 m_2 m_3 m_4) = m_6(m_1 m_2 m_3 m_4).$$

Les points m_1, m_2, m_3, m_4, m''_5, m_6, sont donc sur une conique.

On peut permuter, dans ce raisonnement, les rôles assignés aux points d'indice 1, 2, ..., 5, et l'on arrive à la construction suivante :

Considérons la transformation homographique qui fait correspondre aux points m'_1, m'_2, m'_3, m'_4, respectivement les points m_1, m_2, m_3, m_4, et soit m''_5 le point qui correspond à m'_5, dans cette transformation. Construisons la conique Γ_5 qui contient les points m_1, m_2, m_3, m_4, m''_5. Il existe quatre coniques analogues Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, que l'on obtient en permutant les rôles assignés aux points d'indices 1, 2, 3, 4, 5. Les cinq coniques Γ se coupent au point cherché m_6. On obtient le point m'_6 par une construction analogue.

On voit que, si les points $m'_1, m'_2, \ldots, m'_5$ correspondent aux points m_1, m_2, ..., m_5, dans une même transformation homographique, les cinq coniques Γ sont confondues. On retrouve ainsi le théorème V.

23. On peut simplifier la construction précédente en évitant le tracé de coniques.

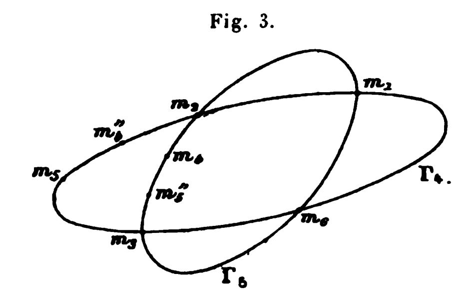
Considérons, en effet, les deux coniques Γ_5 et Γ_4, la première, définie par les points m_1, m_2, m_3, m_4, m''_5, la seconde par les points m_1, m_2, m_3, m''_4, m_5. Les deux coniques Γ_5 et Γ_4 se coupent aux points m_1, m_2, m_3, m_6. On a la suite d'égalités suivantes entre rapports anharmoniques [la seconde de ces égalités provient de ce que les deux systèmes de points

$(m_1, m_2, m_3, m_4, m''_5)$, $(m_1, m_2, m_3, m''_4, m_5)$ sont tous les deux des transformées homographiques du système $(m'_1, m'_2, m'_3, m'_4, m'_5)]$:

$$m_6(m_1 m_2 m_3 m_4) = m''_5(m_1 m_2 m_3 m_4)$$
$$= m_5(m_1 m_2 m_3 m''_4) = m_6(m_1 m_2 m_3 m''_4);$$

on voit donc, en rapprochant les membres extrêmes, que le point m_6 est

Fig. 3.



sur la droite $m_4 m''_4$. Il est de même sur $m_5 m''_5$ et sur les droites analogues.

Le point m_6 *est donc le point commun aux cinq droites* $m_1 m''_1$, $m_2 m''_2$, ..., $m_5 m''_5$.

Les constructions données aux nos **22** et **23** avaient été signalées par E. Duporcq.

CHAPITRE V.

Un D. S. a cubiques planes liées.

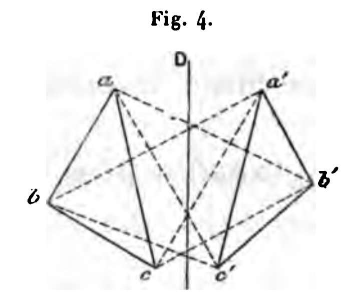
24. Si C et C′ sont deux courbes planes liées, ce sont nécessairement deux courbes d'ordre trois au plus, à moins que les deux plans de C et C′ ne soient liés tout entiers. En effet, si C′ par exemple est d'ordre supérieur à trois, une droite D′ quelconque coupe cette courbe au moins en quatre points m'_1, m'_2, m'_3, m'_4, dont chacun est lié à un point fixe de la courbe C. Il en résulte, en vertu du théorème II, que tout point de D′ est lié à un point fixe, et, comme D′ est arbitraire dans le plan de la

courbe C′, on voit bien que tout point de ce plan est lié à un point fixe.

Des courbes planes liées ne peuvent donc être que des droites, des coniques ou des cubiques. Les deux premiers cas donnent lieu à des D. S. inconditionnels qui ont été étudiés dans le précédent Chapitre; je vais montrer, dans celui-ci, l'existence d'un D. S. à cubiques planes liées, qui m'a semblé présenter un intérêt particulier, en raison des considérations géométriques simples qui y conduisent.

25. Considérons, en premier lieu, un triangle abc fixe et une droite D variable. Construisons le triangle $a'b'c'$ symétrique du triangle abc par rapport à D.

Fig. 4.



On a visiblement les relations de longueurs :

$$bc' = cb', \qquad ca' = ac', \qquad ab' = ba'.$$

Le triangle $a'b'c'$ est une figure de grandeur invariable dont la position dépend de quatre paramètres. Je puis donc déplacer ce triangle en l'assujettissant à trois conditions. Je choisirai celles qui sont traduites par les relations

$$\text{(77)} \qquad A\overline{aa'}^2 + B\overline{bb'}^2 + C\overline{cc'}^2 = K_1\lambda + K_2;$$

$$\text{(78)} \qquad \overline{bc'}^2 = \overline{cb'}^2 = A_1\lambda + A_2,$$

$$\text{(79)} \qquad \overline{ca'}^2 = \overline{ac'}^2 = B_1\lambda + B_2,$$

$$\text{(80)} \qquad \overline{ab'}^2 = \overline{ba'}^2 = C_1\lambda + C_2,$$

où A, B, C, K_1, K_2, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 désignent des constantes arbitraires, λ un paramètre variable.

Je vais montrer qu'il existe, dans le plan $(a'b'c')$, une infinité simple de points dont chacun est lié à un point du plan (abc).

Soient, en effet, m et m' deux points appartenant respectivement au plan (abc) et au plan $(a'b'c')$. Je désigne par α, β, γ les coordonnées *barycentriques* du point m par rapport au triangle abc, c'est-à-dire des quantités proportionnelles aux masses qu'il faut affecter aux points a, b, c, pour que le centre de gravité de ces masses soit le point m. Soient de même α', β', γ' les coordonnées barycentriques du point m' par rapport au triangle $a'b'c'$.

On a, d'après un théorème connu (théorème de Stewart),

$$\overline{mm'}^2 = \frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\alpha\overline{am'}^2 + \beta\overline{bm'}^2 + \gamma\overline{cm'}^2\right) + H_1,$$

de même

$$\overline{am'}^2 = \frac{1}{\alpha'+\beta'+\gamma'}\left(\alpha'\overline{aa'}^2 + \beta'\overline{ab'}^2 + \gamma'\overline{ac'}^2\right) + H_2,$$

et des expressions analogues pour $\overline{bm'}^2$ et $\overline{cm'}^2$. On a donc finalement

$$\begin{aligned}(81)\quad \overline{mm'}^2 = & \frac{1}{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha'+\beta'+\gamma')} \\ & \times\left(\alpha\alpha'\overline{aa'}^2 + \beta\beta'\overline{bb'}^2 + \gamma\gamma'\overline{cc'}^2 + \beta\gamma'\overline{bc'}^2\right. \\ & \left. + \gamma\beta'\overline{cb'}^2 + \gamma\alpha'\overline{ca'}^2 + \alpha\gamma'\overline{ac'}^2 + \alpha\beta'\overline{ab'}^2 + \beta\alpha'\overline{ba'}^2\right) + H_3.\end{aligned}$$

Dans ces relations, H_1, H_2 et H_3 désignent des constantes qui ne dépendent pas de la position relative des triangles abc, $a'b'c'$.

Cela posé, supposons que α, β, γ, α', β', γ' satisfassent aux relations

$$(82)\qquad \alpha\alpha' = A, \qquad \beta\beta' = B, \qquad \gamma\gamma' = C.$$

La relation (81) pourra alors s'écrire, en tenant compte des rela-

tions (77) à (80),

$$(83)\qquad \overline{mm'}^2 = \frac{1}{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha'+\beta'+\gamma')} \times [K_1 + A_1(\beta\gamma'+\gamma\beta') + B_1(\gamma\alpha'+\alpha\gamma') + C_1(\alpha\beta'+\beta\alpha')]\lambda + H,$$

H désignant une nouvelle constante; $\overline{mm'}^2$ sera donc constant si l'on a

$$(84)\qquad K_1 + A_1(\beta\gamma'+\gamma\beta') + B_1(\gamma\alpha'+\alpha\gamma') + C_1(\alpha\beta'+\beta\alpha') = 0.$$

Les relations (82) et (84) sont au nombre de quatre. Mais, comme α, β, γ d'une part, α', β', γ' de l'autre ne sont définis qu'à un facteur constant près, on peut supposer que l'une des relations (82) est identiquement satisfaite (en faisant, par exemple, $\alpha = \alpha' = \sqrt{A}$). On voit donc que $\overline{mm'}^2$ sera constant si *trois* conditions seulement sont satisfaites par les deux points m et m'. *La proposition que j'avais en vue est donc établie.*

Il reste à reconnaître quelle est la nature des deux courbes liées Γ et Γ', qui sont lieux respectivement des points m et m'. La courbe Γ s'obtient en éliminant α', β', γ' entre les relations (82) et (84), ce qui donne

$$(85)\qquad A_1\alpha(B\beta^2+C\gamma^2) + B_1\beta(C\gamma^2+A\alpha^2) + C_1\gamma(A\alpha^2+B\beta^2) + K_1\alpha\beta\gamma = 0.$$

La courbe Γ est donc une cubique circonscrite au triangle abc. Les points a_1, b_1, c_1 où Γ rencontre les côtés de ce triangle, en dehors des points a, b, c, *sont sur une même droite,* dont l'équation est

$$\frac{A\alpha}{A_1} + \frac{B\beta}{B_1} + \frac{C\gamma}{C_1} = 0.$$

Il est clair, en raison de la symétrie des formules (82) et (84), et de

l'égalité des triangles abc, $a'b'c'$, que la courbe Γ' est une cubique égale à Γ, et située par rapport au triangle $a'b'c'$ comme Γ l'est par rapport à abc. En particulier, Γ' rencontre les côtés du triangle $a'b'c'$, en dehors des sommets, en trois points a'_1, b'_1, c'_1 qui sont en ligne droite. Enfin Γ et Γ' sont symétriques par rapport à D.

Il reste à définir la correspondance qui existe entre les points liés m et m'. En ayant encore recours aux arguments elliptiques, on a, avec les conventions et les notations du n° **20**,

$$\mu' = \mu + k,$$

k étant une constante. En effet, la correspondance dont il s'agit est birationnelle, en vertu des formules (82).

La constante k n'est pas quelconque. Pour le faire voir, remarquons que le point a est lié au point a'_1. En effet, si l'on fait dans les relations (82)

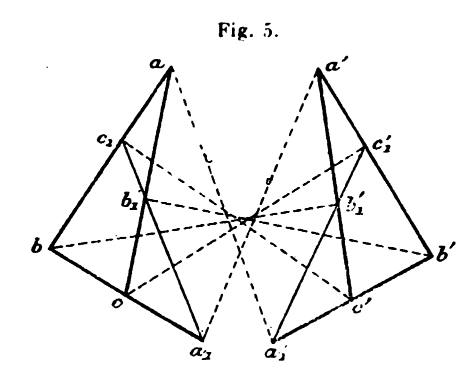
$$\beta = \gamma = 0,$$

il vient

$$\beta' = \gamma' = \infty.$$

De même $(b_1 b'_1)$, $(c_1 c'_1)$, $(a'_1 a_1)$, $(b'_1 b_1)$, $(c'_1 c_1)$ sont des couples de

Fig. 5.



points liés (*voir*, pour plus de commodité, le schéma ci-dessus, où les liaisons sont figurées par des traits en pointillé).

Cela posé, désignons par (a) l'argument du point a sur Γ : c'est aussi

l'argument du point a' sur Γ'. Employons pour les arguments des autres points des notations analogues. Les lignes droites de la figure donnent les relations

$$(86)\qquad \begin{cases} (b) + (c) + (a_1) = 0, \\ (c) + (a) + (b_1) = 0, \\ (a) + (b) + (c_1) = 0, \\ (a_1) + (b_1) + (c_1) = 0; \end{cases}$$

d'où l'on tire, par une combinaison simple,

$$2[(a) + (b) + (c)] = 0,$$

et, par suite,

$$(87)\qquad (a) + (b) + (c) = \text{une demi-période.}$$

Cette demi-période doit être distincte de *zéro,* puisque les points a, b, c ne sont pas en ligne droite. Je la désignerai par ω.

On a alors, en comparant la première des relations (86) et la relation (87),

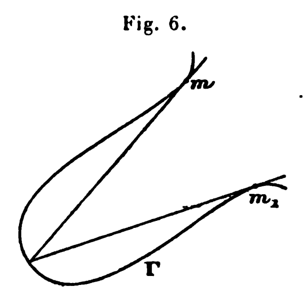
$$(a_1) = (a'_1) = (a) - \omega.$$

Donc, en général,

$$\mu' = \mu - \omega.$$

Ainsi les points m et m' ont des arguments qui diffèrent d'une demi-

Fig. 6.



période. Si l'on désigne par m_1 le point de Γ qui est symétrique du point m' par rapport à la droite D, les points m et m_1 sont en *correspon-*

dance steinérienne, c'est-à-dire que les tangentes à Γ en m et en m_1 vont se couper sur la courbe. C'est là un résultat classique qui résulte immédiatement de la relation

$$-2\mu' = -2\mu + 2\omega.$$

26. Il suffit maintenant de quelques mots pour démontrer le théorème VI, dont je reproduis l'énoncé :

Soient Γ une cubique plane quelconque fixe, m et m_1 deux points de cette courbe, y constituant un couple steinérien.

Construisons la cubique Γ', symétrique de Γ par rapport à une droite quelconque de l'espace, et soit m' le point de Γ' qui est symétrique du point m_1. On peut déplacer Γ', en liant tous les couples de points analogues à m, m'.

Déterminons, en effet, sur Γ trois points a, b, c, dont les arguments satisfassent à la relation

$$(a) + (b) + (c) = \omega.$$

Si a_1, b_1, c_1 sont les points de rencontre, autres que a, b, c, de Γ et des côtés du triangle abc, on a

$$(a_1) + (b_1) + (c_1) = -[(b) + (c)] - [(c) + (a)] \\ - [(a) + (b)] = -2\omega,$$

et par suite les points a_1, b_1, c_1 sont en ligne droite.

La cubique Γ, rapportée au triangle abc, aura, en coordonnées barycentriques, une équation qui peut toujours être ramenée à la forme (85).

Cela posé, on construira le triangle $a'b'c'$, symétrique du triangle abc par rapport à la droite dont il est question dans l'énoncé, et l'on déplacera ce triangle de manière à satisfaire aux relations (77) à (80), où les coefficients A, B, C, A_1, B_1, C_1, K_1 sont ceux qui figurent dans l'équation (85). Les coefficients K_2, A_2, B_2, C_2 doivent être déterminés de

telle manière que, pour une valeur particulière de λ, par exemple $\lambda = 0$, les premiers membres des relations (77) à (80) prennent les valeurs correspondant aux conditions initiales choisies.

Dans ce déplacement, il est clair *que les cubiques liées dont on a reconnu l'existence se confondent nécessairement avec les cubiques* Γ *et* Γ' *de l'énoncé* [1].

CHAPITRE VI.

Les D. S. a espaces liés.

27. Je me propose de rechercher le D. S. le plus général dans lequel la figure (F') est constituée par tous les points d'un espace. Ainsi, tout point m' entraîné avec le trièdre $O'x'y'z'$ est lié à un point m fixe.

Si la figure (F) constituée par les points m ne remplit pas elle-même tout l'espace, il y a dans la figure (F') une infinité de points qui sont liés à un même point fixe, c'est-à-dire qui décrivent des sphères concentriques, et le mouvement de (F') est nécessairement une rotation autour de ce point. On peut dès lors énoncer immédiatement les résultats suivants :

1° Si la figure (F) se réduit à un point unique, le mouvement de (F') est une rotation (à trois paramètres) autour de ce point;

2° Si la figure (F) a au moins deux points à distance finie, elle est constituée par la droite qui joint ces deux points, et le mouvement de (F') est la rotation autour de cette droite;

3° Si la figure (F) est rejetée tout entière à l'infini, alors tous les points de (F') restent dans des plans fixes, et l'on est ramené au problème I de M. Darboux (n° 3).

Écartons donc ces cas, et supposons que (F), comme (F'), est constituée par tous les points d'un espace.

---

[1] *Voir* plus loin (n° 31) un autre D. S. à cubiques planes liées.

Considérons les points à l'infini de la figure (F); ils sont liés à des points de (F′) dont l'ensemble peut :

1° Constituer une surface (G′);
2° Constituer une courbe C′;
3° Être réduit à un point unique O′.

Dans le premier cas, la surface (G′) possède une courbe à l'infini, dont chaque point est relié à un point à l'infini de (F). En d'autres termes, il existe dans (F′) une infinité de directions dont chacune est liée à une direction fixe Comme on l'a vu au n° **10**, cela exige *qu'il y ait dans* (F′) *une direction fixe.*

Dans le deuxième cas, tous les points de C′ sont liés à une infinité de points fixes, à l'infini. Donc chacun de ces points décrit une droite.

Soient alors m' et n' deux points de C′, M et N les droites qu'ils décrivent respectivement. La droite $m'n'$ fait évidemment un angle constant avec un plan, parallèle à la fois à M et à N, c'est-à-dire que la *direction $m'n'$ est liée à une direction fixe.*

Si la courbe C′ ne se réduit pas à une droite, les directions telles que $m'n'$ sont en nombre infini, et l'on est amené à la même conclusion que dans le premier cas.

Si la courbe C′ se réduit à une droite, toutes les droites telles que M sont parallèles entre elles, comme on le voit très simplement, et la direction de C′ est fixe.

Enfin, *dans le troisième cas,* le point O′, lié à tous les points à l'infini de (F), est fixe, et le mouvement de (F′) est une rotation autour de ce point.

En laissant de côté ce dernier cas, on voit *qu'il y a nécessairement dans* (F′) *une direction fixe* ([1]).

([1]) Le second cas conduit à étudier le mouvement d'une figure (G′) dont tous les points décrivent des droites. On trouve aisément que la figure (G′) est nécessairement constituée *par un cylindre de révolution qui roule à l'intérieur d'un cylindre de rayon double.* Une ellipse tracée sur le cylindre mobile engendre alors, comme on sait, un *cylindroïde* ou *conoïde de Plücker.*

28. Je prendrai les axes Oz et $O'z'$ parallèles à cette direction fixe. En désignant par φ l'angle $(Ox, O'x')$, le Tableau des cosinus directeurs se réduit à

$$\begin{array}{lll} \alpha = \cos\varphi, & \beta = \sin\varphi, & \gamma = 0; \\ \alpha' = -\sin\varphi, & \beta' = \cos\varphi, & \gamma' = 0; \\ \alpha'' = 0, & \beta'' = 0, & \gamma'' = 1, \end{array}$$

et l'équation fondamentale de liaison s'écrit

$$(88) \quad \begin{aligned} &\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2x\xi - 2y\eta \\ &\quad + 2x'(\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi) + 2y'(-\xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi) \\ &= 2(z - z')\zeta + 2(xx' + yy')\cos\varphi + 2(yx' - xy')\sin\varphi + 2zz' + h. \end{aligned}$$

Le mouvement doit avoir lieu de telle manière qu'à tout système (x', y', z') on puisse faire correspondre un système (x, y, z), tel que la relation (88) soit satisfaite.

Considérons cinq relations (88), auxquelles donnent lieu cinq couples de points liés. Nous formons ainsi cinq équations linéaires par rapport aux quantités

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \quad \xi, \quad \eta, \quad \xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi, \quad -\xi\sin\varphi + n\cos\varphi.$$

Si le déterminant des coefficients est nul, quels que soient les cinq couples de points choisis, c'est qu'un couple de points liés quelconques satisfait à une relation de la forme

$$Ax + By + A'x' + B'y' + C = 0,$$

où A, B, A′, B′, C sont des constantes non toutes nulles. On voit, d'après la forme de cette relation, que si le point m' s'éloigne à l'infini, dans une direction autre que celle de $O'z'$, le point m s'éloigne aussi à l'infini, dans une direction autre que celle de Oz. Autrement dit, il existe dans les figures (F) et (F′) une infinité de couples de directions liées dont aucune

ne se confond avec celle de Oz ou de $O'z'$. *Cela exige évidemment que l'orientation du trièdre $O'x'y'z'$ reste fixe, et le mouvement de* (F') *est une translation.* Il est clair que, si cette translation est telle qu'un point de (F') reste sur une sphère, il en sera de même pour tous les points de cette figure.

Écartons ce cas sans intérêt. Alors les cinq équations considérées peuvent être résolues, et l'on a des expressions de la forme

$$(89)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= l_1\cos\varphi + m_1\sin\varphi + n_1\zeta + p_1,\\ \eta &= l_2\cos\varphi + m_2\sin\varphi + n_2\zeta + p_2,\\ \xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi &= l_3\cos\varphi + m_3\sin\varphi + n_3\zeta + p_3,\\ -\xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi &= l_4\cos\varphi + m_4\sin\varphi + n_4\zeta + p_4,\\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2 &= l_5\cos\varphi + m_5\sin\varphi + n_5\zeta + p_5. \end{aligned}\right.$$

On peut, en choisissant convenablement les origines O et O', faire

$$p_1 = p_2 = 0.$$

L'élimination de ξ, η entre les quatre premières relations donne

$$(90)\quad \begin{aligned} & l_1\cos^2\varphi + m_2\sin^2\varphi + (m_1+l_2)\sin\varphi\cos\varphi - l_3\cos\varphi \\ & \qquad - m_3\sin\varphi - p_3 + (n_1\cos\varphi + n_2\sin\varphi - n_3)\zeta = 0, \end{aligned}$$

et

$$(91)\quad \begin{aligned} & l_2\cos^2\varphi - m_1\sin^2\varphi + (m_2-l_1)\sin\varphi\cos\varphi - l_4\cos\varphi \\ & \qquad - m_4\sin\varphi - p_4 + (n_2\cos\varphi - n_1\sin\varphi - n_4)\zeta = 0. \end{aligned}$$

Ces deux relations doivent être identiques, sans quoi l'angle φ satisferait à une relation à coefficients constants. On est conduit à un calcul des plus simples dont il suffit d'indiquer les résultats.

1° On peut assurer l'identité des relations (90) et (91) en faisant

$$l_1 = -n_1 u,\qquad m_1 = -n_1 v,\qquad l_2 = -n_2 u,\qquad m_2 = -n_2 v.$$

On aura alors

$$\zeta = u\cos\varphi + v\sin\varphi + w,$$

u, v, ω étant des constantes. Les deux premières des relations (89) se réduisent alors à

$$\xi = n_1 w,$$

$$\eta = n_2 w,$$

et la cinquième devient

$$(n_1^2 + n_2^2)w^2 + (u\cos\varphi + v\sin\varphi + w)^2$$
$$= l_5\cos\varphi + m_5\sin\varphi + n_5(u\cos\varphi + v\sin\varphi + w) + p_5.$$

Cette relation ne peut être identiquement satisfaite que si l'on a

$$u = v = 0$$

et, par suite,

$$\zeta = \text{const.}$$

Ainsi le point O′ est fixe, et nous retrouvons encore comme solution *la rotation autour d'un axe fixe*.

2° Les relations (90) et (91) peuvent encore être identifiées si l'on a

$$\frac{l_1 - m_2}{l_2 + m_1} = \frac{m_1 + l_2}{m_2 - l_1} = \ldots = \frac{n_1}{n_2} = \frac{n_2}{-n_1},$$

ce qui exige, du moment qu'on se borne à la recherche des D. S. réels,

$$m_2 = l_1, \qquad l_2 = -m_1, \qquad n_1 = n_2 = 0.$$

On a donc

$$\xi = \quad l_1 \cos\varphi + m_1\sin\varphi,$$

$$\eta = -m_1\cos\varphi + l_1 \sin\varphi,$$

et l'on en conclut que le point dont les coordonnées par rapport au

trièdre $O'x'y'z'$ sont

$$-l_1, \quad m_1, \quad o,$$

se confond avec le point O. En transportant en ce point l'origine O', on aura

$$(92) \qquad \xi = \eta = 0.$$

Ainsi l'axe $O'z'$ *glisse sur l'axe* Oz. Il est maintenant facile de voir que, si ce glissement s'effectue de telle manière qu'un point A' de la figure (F') soit lié à un point fixe A, tout point de (F') est aussi lié à un point fixe.

Nous pouvons, en effet, supposer que les points A et A' sont sur les axes Ox, $O'x'$, de telle sorte que leurs coordonnées respectives sont :

$$\text{pour } A_1 = (a, 0, 0), \qquad \text{pour } A' = (a', 0, 0).$$

Si nous faisons dans la relation (88)

$$x = a, \qquad y = z = 0, \qquad x' = a', \qquad y' = z' = 0, \qquad \xi = \eta = 0,$$

il vient

$$(93) \qquad \zeta^2 = 2aa'\cos\varphi + h,$$

et, dans le mouvement défini par les formules (92) et (93), on voit que tout point (x', y', z') est lié au point (x, y, z) qui lui correspond par les formules

$$xx' + yy' = aa', \qquad yx' - xy' = 0, \qquad z - z' = 0,$$

ou

$$x = \frac{aa'x'}{x'^2 + y'^2}, \qquad y = \frac{aa'y'}{x'^2 + y'^2}, \qquad z = z'.$$

L'interprétation géométrique de ces formules est aisée : tous les points

de (F') qui sont dans le plan (P') dont l'équation est

$$z' = h,$$

sont liés à des points situés dans le plan (P) dont l'équation est

$$z = h.$$

Si, de plus, on amène d'une manière convenable le plan (P') à coïncider avec le plan (P), les points de ces deux plans qui étaient liés deux à deux se correspondent dans une inversion de module aa'.

Le théorème IX du n° **3** est donc complètement établi.

Dans ce mouvement, tous les points décrivent des biquadratiques, intersections de sphères et de cylindres de révolution.

Une droite de la figure mobile est liée en général à une cubique gauche, et son mouvement est identique à celui qui a été défini au n° **12** (p. 23) [1].

CHAPITRE VII.

RECHERCHES GÉNÉRALES SUR LES D. S.

29. Pour trouver de nouveaux D. S. on peut procéder de la façon suivante :

Écrivons la relation fondamentale de liaison entre *sept* couples de points (x_i, y_i, z_i), (x'_i, y'_i, z'_i), appartenant respectivement à (F) et à (F'); nous formons ainsi un certain système d'équations linéaires par rapport aux quantités

$$\text{(Q)} \quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2, \quad \xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta, \quad \alpha'\xi+\ldots, \quad \alpha''\xi+\ldots.$$

---

[1] Le problème des D. S. à espaces liés a été traité aussi par MM. ANDRADE (*Comptes rendus,* 6 juin 1904, t. CXXXVIII, p. 1404), et par M. LE ROUX (*Bulletin de la Société scientifique et médicale de l'Ouest,* t. XIII, n° 1, 1904).

Admettons sans discussion que le déterminant de ces équations

$$\| \, 1 \quad x_i \quad y_i \quad z_i \quad x'_i \quad y'_i \quad z'_i \, \|_{i=1,\ldots}$$

est différent de zéro [1]. Alors on peut résoudre le système par rapport aux quantités (Q), ce qui donne pour chacune d'elles une expression linéaire en $\alpha, \ldots, \gamma''$.

Nous sommes donc amenés à traiter tout d'abord les questions suivantes :

Trouver des formules définissant un mouvement dans lequel les sept quantités (Q) *sont fonctions linéaires des cosinus* $\alpha, \ldots, \gamma''$.

En introduisant les variables d'Olinde Rodrigues, on peut dire que les sept quantités (Q) doivent être de la forme

$$\frac{F(\lambda, \mu, \nu, \rho)}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2},$$

F désignant un polynome homogène du second degré. Ainsi, en désignant par P, Q, R, P_1, Q_1, R_1, S_1 de tels polynomes, et en posant

$$S = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2, \tag{94}$$

on doit avoir

$$\xi = \frac{P}{S}, \qquad \eta = \frac{Q}{S}, \qquad \zeta = \frac{R}{S}, \tag{95}$$

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = \frac{P_1}{S}, \qquad \alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta = \frac{Q_1}{S}, \qquad \alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta = \frac{R_1}{S}, \tag{96}$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{S_1}{S}. \tag{97}$$

---

[1] Si ce déterminant est nul, quels que soient les sept couples choisis de points liés, les coordonnées de deux tels points donnent lieu à une relation (au moins) de la forme

$$A + Bx + Cy + Dz + B'x' + C'y' + D'z' = 0;$$

et cette relation entraîne l'une des deux conséquences suivantes, évidemment d'un caractère exceptionnel : ou bien l'une au moins des figures (F) et (F') est plane, ou bien les points à l'infini de l'une d'entre elles sont liés aux points à l'infini de l'autre.

$$\ldots + \gamma\zeta = \frac{(\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + \rho^2)P + 2(\lambda\mu - \nu\rho)Q + 2(\lambda\nu + \mu\rho)R}{S}$$

$$= -\frac{P}{S} + 2\frac{\lambda(\lambda P + \mu Q + \nu R) + \rho(\rho P - \nu Q + \mu R)}{S},$$

et des expressions analogues pour $\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta$, $\alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta$.

Les relations (96) peuvent donc s'écrire

$$(98) \qquad \lambda(\lambda P + \mu Q + \nu R) + \rho(\rho P - \nu Q + \mu R) = \frac{1}{2}(P + P_1)S,$$

$$(99) \qquad \mu(\lambda P + \mu Q + \nu R) + \rho(\rho Q - \lambda R + \nu P) = \frac{1}{2}(Q + Q_1)S,$$

$$(100) \qquad \nu(\lambda P + \mu Q + \nu R) + \rho(\rho R - \mu P + \lambda Q) = \frac{1}{2}(R + R_1)S,$$

auxquelles il faut adjoindre la relation (97), qui s'écrit

$$(101) \qquad P^2 + Q^2 + R^2 = SS_1.$$

Ajoutons membre à membre les relations (98), (99), (100), multipliées respectivement par P, Q, R; il vient, en tenant compte de (101),

$$(\lambda P + \mu Q + \nu R)^2 = TS,$$

où T est un polynome du quatrième degré. Cette relation sera satisfaite si l'on a

$$(102) \qquad \lambda P + \mu Q + \nu R = -DS,$$

D étant linéaire. En portant cette valeur de $\lambda P + \mu Q + \nu R$ dans les relations (98) à (100), on voit que les trois polynomes

$$\rho(\rho P - \nu Q + \mu R), \qquad \rho(\rho Q - \lambda R + \nu P), \qquad \rho(\rho R - \mu P + \lambda Q)$$

doivent être divisibles par S, ce qui aura lieu si l'on a [1]

$$(103)\qquad \rho P - \nu Q + \mu R = AS,$$

$$(104)\qquad \rho Q - \lambda R + \nu P = BS,$$

$$(105)\qquad \rho R - \mu P + \lambda Q = CS,$$

A, B, C étant linéaires en λ, μ, ν, ρ. Les relations (102) à (105), multipliées respectivement par $-\rho$, λ, μ, ν, donnent

$$(106)\qquad A\lambda + B\mu + C\nu + D\rho = 0.$$

Réciproquement, supposons les paramètres λ, μ, ν, ρ liés par la relation (106); les relations (103), (104) et (105), résolues par rapport à P, Q, R, donnent par un calcul facile

$$(107)\qquad \begin{cases} P = -D\lambda + B\nu - C\mu + A\rho, \\ Q = -D\mu + C\lambda - A\nu + B\rho, \\ R = -D\nu + A\mu - B\lambda + C\rho. \end{cases}$$

On trouve ensuite

$$(108)\qquad \begin{cases} P_1 = -D\lambda - B\nu + C\mu + A\rho, \\ Q_1 = -D\mu - C\lambda + A\nu + B\rho, \\ R_1 = -D\nu - A\mu + B\lambda + C\rho, \end{cases}$$

et enfin

$$(109)\qquad S_1 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2.$$

En résumé, supposons que λ, μ, ν, ρ *satisfassent à la relation* (106), *où* A, B, C, D *désignent quatre expressions linéaires et homogènes en* λ, μ, ν, ρ. *Cette relation, les formules d'Olinde Rodrigues et les*

---

[1] Il en sera encore ainsi si ρ est nul. Cette hypothèse sera examinée au Chapitre VIII.

formules (95), *où les polynomes* P, Q, R *sont définis par les relations* (107), *définissent un mouvement à deux paramètres, dans lequel les relations* (96) *et* (97) *sont satisfaites,* P_1, Q_1, R_1 *et* S_1 *étant définis par les relations* (108) et (109).

30. Cherchons maintenant à déterminer un mouvement, défini par les formules précédentes et par une autre relation convenablement choisie entre les cosinus $\alpha_1, \ldots, \gamma''$, de manière à obtenir un D. S.

Exprimons, à cet effet, la liaison de deux points $m_0(x_0, y_0, z_0)$ et $m'(x'_0, y'_0, z'_0)$. En remplaçant dans l'équation fondamentale les quantités (Q) et les cosinus par leurs valeurs en fonction des paramètres λ, μ, ν, ρ, on obtient une relation de la forme

$$f(\lambda, \mu, \nu, \rho) = 0, \tag{110}$$

f étant homogène et du second degré. Cette relation et la relation (106), *supposée distincte,* définissent la courbe commune à deux quadriques, si l'on y regarde λ, μ, ν, ρ comme coordonnées homogènes d'un point de l'espace.

Toute autre liaison de deux points $m(x, y, z)$ et $m'(x', y', z')$ se traduira par une relation analogue à (110), représentant une nouvelle quadrique (R); cette relation devra résulter des relations (106) et (110). *Autrement dit, la quadrique* (R) *devra contenir tout ou partie de la courbe commune aux quadriques* (106) *et* (110) [1]. Appelons C la partie de cette courbe commune que doit contenir (R). On est amené à distinguer les cas suivants :

1° C est une biquadratique gauche;
2° C est une cubique gauche;

---

[1] Si la relation (110) n'est pas distincte de (106), on peut imaginer qu'entre les paramètres λ, μ, ν, ρ existe une nouvelle relation, d'un degré quelconque. *Alors* (R) *doit être identique à la quadrique* (106). Je ne chercherai pas les D. S. auxquels pourrait conduire l'examen de ce cas particulier.

3° C est une conique;

4° C est une droite.

1° Dans le premier cas, la quadrique (R), devant contenir une biquadratique gauche, est assujettie à *huit* conditions. Or (R) ne dépend que de *sept* paramètres, à savoir, les coordonnées x, y, z, x', y', z' des points m et m', et la distance mm'. *On ne doit donc pas s'attendre à trouver, en dehors des points m_0 et m'_0, de couples de points liés;* une telle circonstance ne pourrait se produire que dans un cas exceptionnel, et je n'ai pu réussir à obtenir de tels cas, ou à démontrer qu'ils sont impossibles.

2° La quadrique (R) est assujettie à *sept* conditions. Il y aura donc un nombre fini de couples de points liés. Exceptionnellement, il peut s'en trouver une infinité; on est ainsi conduit à un D. S à courbes liées : je donnerai plus loin un exemple d'un tel cas.

3° La quadrique (R) est assujettie à *cinq* conditions. On trouvera donc une *infinité double* de couples de points liés; on est ainsi conduit à des D. S. à surfaces liées, qui feront l'objet d'une étude approfondie au Chapitre VIII.

4° Les paramètres λ, μ, ν, ρ satisfont à deux relations linéaires qu'on peut ramener à la forme

$$\nu = 0, \qquad \rho = 0,$$

et le mouvement du trièdre $O'x'y'z'$ est une translation.

J'ai laissé de côté l'étude de ce dernier cas. Les figures liées, dans un tel D. S., sont des *cylindres,* comme il est évident *a priori* [1].

31. Il résulte de ce qui précède que c'est l'étude du troisième cas (C est une conique) qui m'a paru la plus féconde en résultats intéressants.

---

[1] Le D. S. à espaces liés, étudié au Chapitre précédent, appartient à la catégorie des mouvements pour lesquels le point (λ, μ, ν, ρ) décrit une droite; mais ζ n'est pas une fonction rationnelle de λ, μ, ν, ρ.

Avant d'y arriver, je vais donner un exemple relatif au deuxième cas (C est une cubique gauche).

Faisons à cet effet, dans les formules (107),

$$A = 2b\rho, \qquad B = 2a\nu, \qquad C = D = 0,$$

a et b étant des constantes quelconques. Les valeurs obtenues pour les polynomes P, Q, R, P_1, Q_1, R_1, transportées dans les expressions (95), (96) et (97), donnent

$$(110') \qquad \xi = 2\frac{a\nu^2 + b\rho^2}{S}, \qquad \eta = 2\frac{(a-b)\nu\rho}{S}, \qquad \zeta = 2\frac{b\mu\rho - a\lambda\nu}{S},$$

$$(111) \qquad \begin{cases} \alpha\,\xi + \beta\,\eta + \gamma\,\zeta = 2\,\dfrac{-a\nu^2 + b\rho^2}{S}, \\ \alpha'\,\xi + \beta'\eta + \gamma'\,\zeta = 2\,\dfrac{(a+b)\nu\rho}{S}, \\ \alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta = 2\,\dfrac{-b\mu\rho + a\lambda\nu}{S}, \end{cases}$$

$$(112) \qquad \zeta^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 4\frac{a^2\nu^2 + b^2\rho^2}{S},$$

et la relation (106) devient

$$(113) \qquad a\mu\nu + b\lambda\rho = 0.$$

Assujettissons, en outre, λ, μ, ν, ρ à vérifier la relation

$$(114) \qquad \lambda(l\lambda + m\mu) + \nu(p\nu + r\rho) = 0$$

où l, m, p, r sont encore des constantes arbitraires.

Les quadriques (113) et (114) ont visiblement en commun la droite $\lambda = 0$, $\nu = 0$. Assujettissons le point λ, μ, ν, ρ à décrire la cubique gauche C qui forme le reste de leur intersection et qui appartient ainsi à la quadrique

$$(115) \qquad a\mu(l\lambda + m\mu) - b\rho(p\nu + r\rho) = 0;$$

les formules définissent un mouvement à un paramètre qui est un **D. S.**, ainsi que je vais le montrer.

Écrivons, à cet effet, l'équation de liaison des deux points $m(x, y, 0)$ et $m'(x', y', 0)$, qui appartiennent respectivement aux plans Oxy et $O'x'y'$:

$$
\begin{aligned}
(116)\qquad & \xi^2+\eta^2+\zeta^2-2x\xi-2y\eta+2x'(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta)\\
&+2y'(\alpha'\xi+\beta'\eta+\gamma'\zeta)\\
&-2xx'\alpha-2xy'\alpha'-2yx'\beta-2yy'\beta'+H,
\end{aligned}
$$

en posant

$$H=x^2+y^2+x'^2+y'^2-d^2.$$

En remplaçant dans (116)

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2,\quad \xi,\quad \eta,\quad \alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta,\quad \alpha'\xi+\beta'\eta+\gamma'\zeta,\quad \alpha,\quad \alpha',\quad \beta,\quad \beta',$$

par leurs valeurs en fonctions de λ, μ, ν, ρ, il vient

$$
\begin{aligned}
(117)\qquad & a^2\nu^2+b^2\rho^2-x(a\nu^2+b\rho^2)-y(a-b)\nu\rho+x'(-a\nu^2+b\rho^2)\\
&+y'(a+b)\nu\rho-xx'(\lambda^2+\rho^2)-xy'(\lambda\mu+\nu\rho)\\
&-yx'(\lambda\mu-\nu\rho)-yy'(\mu^2+\rho^2)+H_1(\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2)=0,
\end{aligned}
$$

en posant

$$H_1=\frac{H+2xx'+2yy'}{4}.$$

Cherchons à déterminer x, y, x', y' et H_1 de telle manière que la quadrique représentée par l'équation (117) contienne la cubique gauche Γ. Il faut à cet effet que le premier membre de cette équation puisse être mis sous la forme

$$k(114)+k'(115)+k''(113).$$

On est ainsi conduit aux relations d'identification suivantes :

$$(118)\quad \begin{cases} -xx' + H_1 = lk, \\ -yy' + H_1 = amk', \\ a^2 - ax - ax' + H_1 = pk, \\ b^2 - bx + bx' - xx' - yy' + H_1 = -brk', \\ -xy' - yx' = mk + alk', \\ -(a-b)y + (a+b)y' - xy' + yx' = rk - bpk'. \end{cases}$$

Ces relations sont au nombre de *six*, et le nombre des inconnues x, y, x', y', H_1, k et k' est de *sept*. Il y a donc une infinité de systèmes de solutions, et j'ai bien établi l'existence de deux courbes liées, appartenant respectivement aux plans Oxy et $O'x'y'$.

[Le succès de la méthode tient, on le voit, à ce que A, B, C, D ont été choisis de telle manière que les numérateurs de ξ, η, $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$, $\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta$, $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, et les premiers membres des relations (114) et (115) ne continssent que *six* termes différents (il n'y a pas de termes en $\mu\nu$, $\lambda\mu$, $\lambda\rho$, $\mu\rho$). On pouvait atteindre le même but en choisissant pour A, B, C, D des expressions plus générales, faciles à former. Je n'ai pas cru intéressant d'indiquer ici ces expressions générales, qui conduisent à des calculs compliqués : le résultat, même particularisé comme je viens de le faire, est encore loin d'être simple.]

Pour avoir l'équation des courbes liées, par exemple de celle qui appartient au plan Oxy, il faut éliminer x', y', H_1, k et k' entre les équations (118). On trouve

$$(119)\quad \begin{vmatrix} -x & 0 & l & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -y & 0 & am & 1 & 0 \\ -a & 0 & p & 0 & 1 & a^2 - ax \\ b - x & -y & 0 & -br & 1 & b^2 - bx \\ -y & -x & m & al & 0 & 0 \\ y & a + b - x & r & -bp & 0 & (b-a)y \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui représente une courbe du troisième ordre. La courbe liée est aussi du troisième ordre.

En développant cette équation, après avoir fait

$$m = p = 0, \qquad l = r = 1,$$

on trouve

$$(120) \quad (a^2+ab)x^3+(a^2+3ab)x^2y+(a^2+ab)xy^2+(ab-b^2)y^3 - 2a^2(a+2b)x^2 - a(a+b)(a+3b)xy - 2a^2by^2 + a^2(a+b)(a+3b)x + 2a^2b(a+b)y - a^2b(a+b)^2 = 0.$$

Malgré la nouvelle simplification introduite, cette équation est encore compliquée ([1]), et la définition géométrique de la courbe qu'elle représente ne semble pas facile.

CHAPITRE VIII.

LE CAS : $\rho = 0$.

32. La recherche des D. S., dans le cas où l'on suppose entre les paramètres λ, μ, ν, ρ une relation linéaire et homogène, qui peut être ramenée, comme l'on sait, à la forme

$$(121) \qquad \rho = 0,$$

est naturellement beaucoup plus simple que dans le cas général; elle conduit aux solutions du problème qui semblent les plus intéressantes.

Dans l'hypothèse où la relation (121) est satisfaite, le Tableau des for-

([1]) Cette équation est irréductible; il en est donc de même, *a fortiori*, de l'équation (19).

mules d'Olinde Rodrigues se réduit à

$$(122)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{S}, & \beta = \alpha' = \dfrac{2\lambda\mu}{S}, \quad \gamma = \alpha'' = \dfrac{2\nu\lambda}{S}, \\ & \beta' = \dfrac{-\lambda^2+\mu^2-\nu^2}{S}, \quad \gamma' = \beta'' = \dfrac{2\mu\nu}{S}, \\ & \gamma'' = \dfrac{-\lambda^2-\mu^2+\nu^2}{S}, \\ \text{où} & S = \lambda^2+\mu^2+\nu^2, \end{cases}$$

et l'on a

$$\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta = \frac{\lambda^2-\mu^2-\nu^2}{S}\xi + \frac{2\lambda\mu}{S}\eta + \frac{2\lambda\nu}{S}\zeta = -\xi + 2\lambda\frac{\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta}{S};$$

de même

$$\alpha'\xi+\beta'\eta+\gamma'\zeta = -\eta + 2\mu\frac{\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta}{S},$$

$$\alpha''\xi+\beta''\eta+\gamma''\zeta = -\zeta + 2\nu\frac{\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta}{S}.$$

Je supposerai que l'on a, pendant tout le mouvement, les relations

$$(123)\qquad \lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta = 0.$$

Cela revient à supposer, comme on le voit aisément en se reportant à l'interprétation cinématique des formules d'O. Rodrigues, *que le trièdre* $O'x'y'z'$ *est constamment symétrique du trièdre* $Oxyz$ *par rapport à une droite dont l'équation est*

$$\frac{x-\frac{\xi}{2}}{\lambda} = \frac{y-\frac{\eta}{2}}{\mu} = \frac{z-\frac{\zeta}{2}}{\nu}.$$

L'équation fondamentale de liaison devient alors, on le vérifiera aisé-

ment,

$$(124)\quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2-2(x+x')\xi-2(y+y')\eta-2(z+z')\zeta = 4\frac{(x\lambda+y\mu+z\nu)(x'\lambda+y'\mu+z'\nu)}{S}+K.$$

Dans toutes les solutions auxquelles on sera conduit, les figures liées F et F′ seront évidemment égales et semblablement placées par rapport aux deux trièdres $Oxyz$ et $O'x'y'z'$.

33. On obtient une *première solution* en supposant que les figures F et F′ sont deux courbes planes; on peut supposer que leurs plans sont respectivement Oxy et $O'x'y'$.

Dans ce cas, deux équations de la forme (124) étant données, on peut en déduire une infinité d'autres de la même forme, par combinaison linéaire. Je laisse au lecteur le soin de reconnaître que l'on obtient ainsi le D. S. *à cubiques planes liées,* qui a fait l'objet du Chapitre V.

34. On obtient une *seconde solution* en cherchant à déterminer des expressions de ξ, η, ζ, des formes

$$\xi,\ \eta,\ \zeta = \frac{\text{polynome du second degré en } \lambda,\ \mu,\ \nu}{S},$$

telles que la relation (123) soit *identiquement* satisfaite. On trouve aisément la solution générale suivante :

$$(125)\qquad \xi=\frac{\mu T_3-\nu T_2}{S},\qquad \eta=\frac{\nu T_1-\lambda T_3}{S},\qquad \zeta=\frac{\lambda T_2-\mu T_1}{S},$$

où T_1, T_2, T_3 désignent des expressions linéaires et homogènes en λ, μ, ν.

Supposons en outre que λ, μ, ν satisfassent à la relation

$$(126)\qquad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=4\frac{A\lambda^2+B\mu^2+C\nu^2}{S},$$

où A, B, C sont des constantes, et où ξ, η, ζ sont remplacés par leurs expressions (125).

Les formules (125) et (126) définissent alors un mouvement qui est un *D. S. à courbes liées*. En effet, l'équation (124) est ici :

$$(127)\quad \begin{aligned} &4(A\lambda^2+B\mu^2+C\nu^2)+2(x+x')(\nu T_2-\mu T_3)\\ &+2(y+y')(\lambda T_3-\nu T_1)+2(z+z')(\mu T_1-\lambda T_2)\\ &-4(x\lambda+y\mu+z\nu)(x'\lambda+y'\mu+z'\nu)-4H(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)=0, \end{aligned}$$

H étant une fonction de x, y, z, x', y', z'. En écrivant que cette équation est identiquement satisfaite, on forme six relations auxquelles doivent satisfaire les quantités x, y, z, x', y', z', H. En éliminant H, x', y', z' entre ces six relations, on trouve deux conditions auxquelles doivent satisfaire x, y, z. Ainsi le point m doit appartenir à une certaine courbe. Il en est de même du point m'.

Le résultat est extrêmement compliqué, si on laisse aux expressions T_1, T_2, T_3 toute leur généralité. Je me contenterai donc de développer le calcul dans un cas particulier, celui où l'on a

$$T_1=2p\lambda,\qquad T_2=2q\mu,\qquad T_3=2r\nu,$$

p, q, r étant des constantes. Le mouvement est alors défini par les formules

$$(128)\quad \left\{\begin{aligned} &\xi=-(\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta)=\frac{2(r-q)\mu\nu}{S},\\ &\eta=-(\alpha'\xi+\beta'\eta+\gamma'\zeta)=\frac{2(p-r)\nu\lambda}{S},\\ &\zeta=-(\alpha''\zeta+\beta''\eta+\gamma''\zeta)=\frac{2(q-p)\lambda\mu}{S},\\ &(r-q)^2\mu^2\nu^2+(p-r)^2\nu^2\lambda^2+(q-p)^2\lambda^2\mu^2\\ &\qquad=(a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2)(\lambda^2+\mu^2+\nu^2), \end{aligned}\right.$$

et la relation (127) se réduit à

$$\begin{aligned} &A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 + (q-r)(x+x')\mu\nu \\ &+ (r-p)(y+y')\nu\lambda + (p-q)(z+z')\lambda\mu \\ &-(x\lambda + y\mu + z\nu)(x'\lambda + y'\mu + z'\nu) - H(\lambda^2+\mu^2+\nu^2) = 0. \end{aligned}$$

En écrivant que cette relation est identiquement satisfaite, il vient

$$A - xx' - H = 0,$$
$$B - yy' - H = 0,$$
$$C - zz' - H = 0;$$

$$(q-r)(x+x') - yz' - zy' = 0,$$
$$(r-p)(y+y') - zx' - xz' = 0,$$
$$(p-q)(z+z') - xy' - yx' = 0.$$

L'élimination de x', y', z', H entre ces six relations donne la courbe (F), qui est du *dixième* ordre. Pour nous rendre compte de ce fait, cherchons le nombre de ses points à l'infini. Il suffit, pour cela, de remplacer dans le système précédent x, y, z par $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$, et de faire $t=0$. On a ainsi, en désignant par H_1 ce que devient H pour $t=0$,

$$xx' + H_1 = 0,$$
$$yy' + H_1 = 0,$$
$$zz' + H_1 = 0;$$

$$(q-r)x - yz' - zy' = 0,$$
$$(r-p)y - zx' - xz' = 0,$$
$$(p-q)z - xy' - yx' = 0,$$

et il faut résoudre ce système, où les inconnues sont $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, x', y', z', H_1$. Un calcul facile permet de reconnaître que le nombre des systèmes de

solutions est égal à 10. La courbe (F) a donc des points à l'infini, ce qui est conforme à l'assertion faite plus haut.

Je vais indiquer les coordonnées de ces points, ainsi que celles des points m' correspondants [1].

1° Il y a dans le plan yOz les deux points définis par les relations

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{\frac{1}{\sqrt{p-r}}} = \frac{z}{\frac{1}{\pm\sqrt{q-p}}}, \qquad t = 0,$$

qui sont liés respectivement aux points

$$x' = \mp\sqrt{(p-r)(q-p)}, \qquad y' = 0, \qquad z' = 0.$$

Il y a deux points analogues dans chacun des plans zOx, xOy, en tout *six* points.

2° Il y a en outre les *quatre* points

$$\frac{x}{\varepsilon_1\sqrt{r-q}} = \frac{y}{\varepsilon_2\sqrt{p-r}} = \frac{z}{\varepsilon_3\sqrt{q-p}},$$

où ε_1, ε_2, ε_3 sont des nombres, égaux à plus ou moins un, et satisfaisant à la condition

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = +1.$$

Ces points sont reliés respectivement aux points

$$x' = \varepsilon_1\sqrt{(p-r)(q-p)},$$
$$y' = \varepsilon_2\sqrt{(q-p)(r-q)},$$
$$z' = \varepsilon_3\sqrt{(r-q)(p-r)}.$$

---

[1] Ces *dix* points m', liés à des points à l'infini, décrivent des courbes planes. M. Darboux a étudié un mouvement à *deux* paramètres, défini par les formules (128) où l'on remplacerait par l'unité les coefficients $2(r-q)$, $2(p-r)$, $2(q-p)$, et dans lequel dix points décrivent des plans (KŒNIGS, *loc. cit.*, p. 365).

Ces résultats se rattachent au théorème suivant que M. Schœnflies démontre dans sa *Géométrie du mouvement* (p. 144 de la Traduction) :

Si l'on donne arbitrairement six positions d'un système, il existe en général dix points dont les positions successives sont dans un même plan.

Il est bien clair que, dans les formules précédentes, on peut échanger x, y, z, respectivement avec x', y', z', puisque les relations qui existent entre ces coordonnées sont symétriques.

En particulier, si l'on efface les accents dans les valeurs x', y', z', on aura les coordonnées des *dix* points de (F) qui décrivent des courbes planes, dans le mouvement inverse de (F) par rapport à (F').

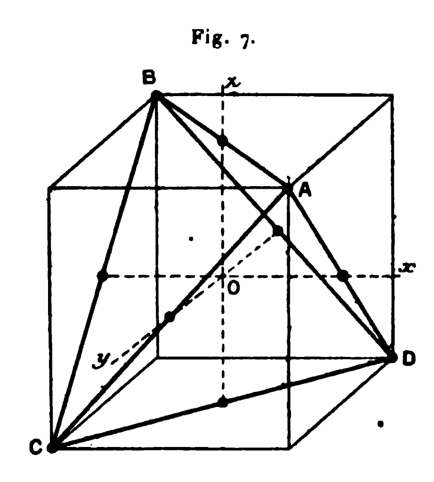
Nous trouvons donc en tout *vingt* points remarquables sur la courbe (F). Ces vingt points ont entre eux des relations géométriques assez dignes d'intérêt, auxquelles conduisent aisément les expressions de leurs coordonnées.

Construisons le parallélépipède dont les arêtes sont parallèles aux axes Ox, Oy, Oz, dont le centre est le point O, et dont un des sommets a pour coordonnées

$$\sqrt{(p-r)(q-p)}, \qquad \sqrt{(q-p)(r-q)}, \qquad \sqrt{(r-q)(p-r)}.$$

Soit ABCD le tétraèdre ayant pour sommets quatre des sommets du

Fig. 7.



parallélépipède, choisis comme l'indique la figure. *Ce tétraèdre a pour faces des plans isotropes,* comme on peut le vérifier aisément.

Cela posé, *les dix points de* (F) *qui décrivent des courbes planes, dans le mouvement inverse de* (F) *par rapport à* (F'), *c'est-à-dire les dix points*

de (F) *qui sont liés à des points à l'infini de* (F'), *sont les sommets du tétraèdre* ABCD, *et les points milieux de ses arêtes.*

Les dix points à l'infini de (F) *sont les points rejetés à l'infini parallèlement aux arêtes du tétraèdre, ou perpendiculairement aux faces.*

Ces derniers points appartiennent aux faces correspondantes, puisque les plans de ces dernières sont isotropes.

35. Dans les deux premiers cas, le point λ, μ, ν, ρ décrivait une courbe plane autre qu'une conique : c'est pour cette raison que les figures liées, dans les mouvements correspondants, sont des courbes. Je vais maintenant examiner deux cas où ce point décrit une *conique ;* on obtiendra alors, conformément aux résultats du n° **30**, des D. S. à surfaces liées.

Le premier de ces D. S. s'obtiendra en faisant, dans les formules (106) et (107) du n° **29**, $\rho = 0$, et

$$A = -2a\lambda, \qquad B = -2b\mu, \qquad C = -2c\nu, \qquad D = 0.$$

Le mouvement se trouve alors défini par les relations

$$(129) \qquad a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2 = 0,$$

$$(130) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= -(\alpha\,\xi + \beta\,\eta + \gamma\,\zeta) = \frac{2(c-b)\mu\nu}{S}, \\ \mu &= -(\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta) = \frac{2(a-c)\nu\lambda}{S}, \\ \zeta &= -(\alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta) = \frac{2(b-a)\lambda\mu}{S}, \end{aligned} \right.$$

$$(131) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{4(a^2\lambda^2 + b^2\mu^2 + c^2\nu^2)}{S}.$$

Cela posé, la liaison de deux points, dans ce mouvement, s'exprime par la relation, facile à former,

$$(132) \qquad \begin{aligned} &a^2\lambda^2 + b^2\mu^2 + c^2\nu^2 + (b-c)(x+x')\mu\nu \\ &+ (c-a)(y+y')\nu\lambda + (a-b)(z+z')\lambda\mu \\ &- (x\lambda + y\mu + z\nu)(x'\lambda + y'\mu + z'\nu) - H(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = 0. \end{aligned}$$

Cette relation doit être identique à (129). L'identification donne

$$a^2 - xx' - H = au,$$

$$b^2 - yy' - H = bu,$$

$$c^2 - zz' - H = cu;$$

$$(b-c)(x+x') - yz' - zy' = 0,$$

$$(c-a)(y+y') - zx' - xz' = 0,$$

$$(a-b)(z+z') - xy' - yx' = 0.$$

Si l'on élimine entre ces six relations x', y', z', H et u, il reste une seule relation entre x, y, z. On formera de même une relation unique entre x', y', z'. *Ainsi nous sommes conduits à un* D. S. *où les figures liées sont deux surfaces. Je vais démontrer que chacune de ces surfaces se réduit à quatre plans imaginaires.*

Pour le faire voir, posons

$$a = l^2, \qquad c - b = n^2 - m^2 = l'^2,$$

$$b = m^2, \qquad a - c = l^2 - n^2 = m'^2,$$

$$c = n^2, \qquad b - a = m^2 - l^2 = n'^2.$$

Les relations précédentes s'écrivent alors

$$l^4 - xx' - H = l^2 u, \tag{133}$$

$$m^4 - yy' - H = m^2 u, \tag{134}$$

$$n^4 - zz' - H = n^2 u; \tag{135}$$

$$l'^2(x+x') + yz' + zy' = 0, \tag{136}$$

$$m'^2(y+y') + zx' + xz' = 0, \tag{137}$$

$$n'^2(z+z') + xy' + yx' = 0, \tag{138}$$

Tout d'abord, en éliminant u et H entre les relations (133), (134) et (135), il vient

$$(139) \qquad l'^2 xx' + m'^2 yy' + n'^2 zz' + l'^2 m'^2 n'^2 = 0.$$

Cela posé, on trouve, en formant les combinaisons $(139) + m'n'(136)$ et $n'(137) + m'(138)$.

$$(140) \quad l'^2 (x + m'n')(x' + m'n') + (m'y + n'z)(m'y' + n'z') = 0,$$

$$(141) \quad (m'y + n'z)(x' + m'n') + (m'y' + n'z')(x + m'n') = 0.$$

De même, les combinaisons $(139) - m'n'(136)$ et $-n'(137) + m'(138)$ donnent

$$(142) \quad l'^2 (x - m'n')(x' - m'n') + (m'y - n'z)(m'y' - n'z') = 0,$$

$$(143) \quad (m'y - n'z)(x' - m'n') + (m'y' - n'z')(x - m'n') = 0.$$

Le système des relations (140) à (143) est équivalent à celui des relations (133) à (138), d'où l'on a éliminé u et H. La discussion est dès lors des plus simples, et il suffit d'indiquer les résultats.

On satisfera aux relations considérées :

1° En donnant à x, y, z des valeurs quelconques satisfaisant à la relation

$$l'x + \varepsilon_1 m'y + \varepsilon_2 n'z + \varepsilon_1 \varepsilon_2 l' m' n' = 0,$$

où ε_1 et ε_2 ont les valeurs ± 1 (quatre systèmes), et en faisant

$$x' = \varepsilon_1 \varepsilon_2 m'n', \qquad y' = \varepsilon_2 n'l', \qquad z' = \varepsilon_1 l'm';$$

2° En permutant, dans les formules précédentes, x avec x', y avec y', z avec z';

3° En donnant à x, y, z des valeurs quelconques satisfaisant aux relations

$$x = \varepsilon m'n', \qquad m'y - \varepsilon n'z = 0,$$

et à x', y', z' des valeurs quelconques satisfaisant aux relations

$$x' = -\varepsilon m' n', \qquad m' y' + \varepsilon n' z' = 0,$$

où $\varepsilon = \pm 1$; et enfin, en donnant à x, y, z, x', y', z' des valeurs satisfaisant aux relations qu'on déduit des précédentes par permutation circulaire.

Ces formules ont une interprétation géométrique simple, qu'on peut rapprocher des résultats du n° **38** :

Construisons le tétraèdre ABCD dons les sommets ont pour coordonnées respectives

$$\begin{array}{lrrr}
\text{A} & m'n', & n'l', & l'm', \\
\text{B} & m'n', & -n'l', & -l'm', \\
\text{C} & -m'n', & n'l', & -l'm', \\
\text{D} & -m'n', & -n'l', & l'm'.
\end{array}$$

Les faces de ce tétraèdre ont pour équations respectives

$$\begin{array}{ll}
(\text{BCD}) & l'x + m'y + n'z + l'm'n' = 0, \\
(\text{CDA}) & l'x - m'y - n'z + l'm'n' = 0, \\
(\text{DAB}) & -l'x + m'y - n'z + l'm'n' = 0, \\
(\text{ABC}) & -l'x - m'y + n'z + l'm'n' = 0.
\end{array}$$

Tous ces plans sont isotropes, en vertu de la relation

$$l'^2 + m'^2 + n'^2 = c - b + a - c + b - a = 0.$$

Soit ensuite A′B′C′D′ un tétraèdre égal au premier, les sommets correspondants étant désignés par les mêmes lettres.

Les deux figures liées (F) *et* (F′) *sont constituées respectivement par*

les faces du tétraèdre ABCD *et par celles du tétraèdre* A'B'C'D', *et la correspondance entre les deux figures est la suivante :*

Pendant le mouvement, le point A *est lié à tous les points de la face* B'C'D', *et le point* A' *à tous les points de la face* BCD; *de même...*

Chaque point de l'arête A'B' *est lié à chaque point de l'arête* CD; *le mouvement de* A'B' *se réduit donc à une rotation autour de* CD; *de même...* [1].

36. Les solutions exposées jusqu'ici étaient intuitives, ou bien s'obtenaient en particularisant les formules (106) et (107), dans lesquelles on supposait $\rho = 0$. Pour en obtenir d'autres, il convient de revenir au problème du n° **29** : *trouver des mouvements tels que* $\xi, \eta, \zeta, \alpha\xi+\ldots, \alpha'\xi+\ldots, \alpha''\xi+\ldots, \xi^2+\eta^2+\zeta^2$ *soient des fonctions linéaires des cosinus* $\alpha, \ldots, \gamma''$; et cela, dans le cas, laissé alors de côté, où l'on a $\rho = 0$.

En reprenant les calculs, on voit aisément que le problème se ramène à *trouver trois polynomes* P, Q, R, *homogènes du second degré en* λ, μ, ν, *tels que l'on ait*

$$\lambda P + \mu Q + \nu R = AS, \tag{144}$$

$$P^2 + Q^2 + R^2 = SS_1, \tag{145}$$

à la faveur d'une relation

$$\varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0.$$

A *et* S *désignent des polynomes en* λ, μ, ν, *respectivement du premier et du second degré.*

Je particulariserai la question en supposant que le polynome homo-

---

[1] M. Borel, qui a obtenu de son côté ce mouvement (*voir* le rapport cité de M. Humbert), a remarqué que, dans le tétraèdre A'B'C'D', il y a deux arêtes opposées réelles, dont chacune tourne autour d'une arête réelle du tétraèdre ABCD; on est ainsi conduit à la construction d'un mécanisme permettant de transformer l'une dans l'autre deux rotations dont les axes ne se rencontrent pas.

gène φ est du second degré. On peut alors, par un choix convenable des axes, ramener l'équation précédente à la forme

$$\varphi(\lambda, \mu, \nu) = a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2 = 0. \tag{146}$$

Les polynomes

$$\lambda P + \mu Q + \nu R - AS,$$
$$P^2 + Q^2 + R^2 - SS_1$$

doivent être divisibles par φ.

La première condition est remplie, si l'on fait

$$P = a_1\varphi + \mu T_3 - \nu T_2 + k_1 S,$$
$$Q = b_1\varphi + \nu T_1 - \lambda T_3 + k_2 S,$$
$$R = c_1\varphi + \lambda T_2 - \mu T_1 + k_3 S,$$

en désignant par T_1, T_2, T_3 trois expressions linéaires et homogènes en λ, μ, ν ; par a_1, b_1, c_1, k_1, k_2, k_3 des constantes. On peut supposer $k_1 = k_2 = k_3 = 0$: cela revient, on le voit tout de suite, à un changement d'origine effectué sur le trièdre mobile. On aura donc simplement, pour toutes les valeurs de λ, μ, ν qui satisfont à la relation (146),

$$P = \mu T_3 - \nu T_2,$$
$$Q = \nu T_1 - \lambda T_3,$$
$$R = \lambda T_2 - \mu T_1 ;$$

d'où

$$P^2 + Q^2 + R^2 = S(T_1^2 + T_2^2 + T_3^2) - (\lambda T_1 + \mu T_2 + \nu T_3)^2.$$

On a donc à résoudre l'identité

$$(\lambda T_1 + \mu T_2 + \nu T_3)^2 = US + V\varphi, \tag{147}$$

U et V étant deux nouveaux polynomes du second degré.

Or on obtient aisément une solution de l'identité (147) : supposons que les coniques représentées par les équations

$$\varphi = 0 \qquad \text{et} \qquad V = 0$$

soient toutes deux bitangentes à chacune des deux coniques

$$U = 0, \qquad S = 0,$$

et fassent partie d'un même système (on sait qu'il existe trois systèmes de coniques bitangentes à deux coniques données). Dans ces conditions, les huit points de contact sont sur une même conique

$$W = 0,$$

dont le premier membre satisfait à l'identité

$$W^2 = US + V\varphi.$$

Il suffira donc de choisir les polynomes T_1, T_2, T_3, de manière à satisfaire à l'identité

$$\lambda T_1 + \mu T_2 + \nu T_3 = W.$$

Les calculs ne présentent aucune difficulté. Par un choix convenable des axes on parvient à simplifier considérablement les expressions obtenues pour ξ, η, ζ, sans diminuer la généralité de la solution. Il suffit d'indiquer le résultat obtenu.

37. Considérons le déplacement défini par les formules

$$(148) \qquad \xi = \frac{2c\mu}{\nu}, \qquad \eta = \frac{2(a\nu - c\lambda)}{\nu}, \qquad \zeta = -\frac{2a\mu}{\nu},$$

$$(149) \qquad \lambda^2 + \mu^2 - k^2\nu^2 = 0.$$

On a, comme dans les cas antérieurement étudiés,

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = -\xi, \quad \alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta = -\eta, \quad \alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta = -\zeta,$$

et l'on trouve aisément

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 4\,\frac{a^2\mu^2 - 2ac\lambda\nu}{\nu^2} + 4(k^2c^2 + a^2).$$

L'équation de liaison entre deux points (x, y, z) et (x', y', z') est alors

$$4\,\frac{a^2\mu^2 - 2ac\lambda\nu}{\nu^2} - 4c(x+x')\frac{\mu}{\nu} + 4c(y+y')\frac{\lambda}{\nu} + 4a(z+z')\frac{\mu}{\nu}$$
$$- \frac{4}{(k^2+1)\nu^2}(x\lambda + y\mu + z\nu)(x'\lambda + y'\mu + z'\nu) = \mathrm{H},$$

H étant une constante. En écrivant que cette relation est identique à (149), on forme les relations

$$xx' - yy' = -a^2 p, \tag{150}$$

$$yz' + zy' + cp(x+x') - ap(z+z') = 0, \tag{151}$$

$$zx' + xz' - cp(y+y') + 2acp = 0, \tag{152}$$

$$xy' + yx' = 0, \tag{153}$$

en posant

$$k^2 + 1 = p.$$

Ces relations étant au nombre de quatre, nous sommes conduits de nouveau *à un* D. S. *à surfaces liées*. Il faut rechercher la nature de ces surfaces (F) et (F′), qui sont égales, comme on le voit par la forme des relations (150) à (153). Le fait était d'ailleurs évident *a priori*, puisque les deux trièdres $Oxyz$ et $O'x'y'z'$ sont symétriques par rapport à une droite.

En éliminant x', y', z' entre les relations (150) à (153), il vient

$$\begin{vmatrix} x & -y & 0 & a^2p \\ cp & z & y-ap & p(cx-az) \\ z & -cp & x & cp(-y+2a) \\ y & x & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On trouve que cette équation du quatrième degré se décompose en deux facteurs (Σ) et (Σ_1)

$$\Sigma = c(x^2+y^2) - axz - acpy = 0, \tag{154}$$

$$\Sigma_1 = x^2+y^2 - 2ay + a^2p = 0. \tag{155}$$

La deuxième de ces équations représente un *cylindre de révolution imaginaire*. On peut en effet l'écrire

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= x^2+y^2-2ay+a^2(k^2+1)\\ &= (y-a)^2+x^2+a^2k^2 = 0.\end{aligned}$$

La première équation représente un *hyperboloïde* contenant l'axe des z, ayant pour trace sur le plan des xy le cercle

$$x^2+y^2-apy.$$

La figure (F') est de même constituée par deux surfaces du second ordre (Σ') et (Σ'_1), dont on obtient les équations en accentuant les lettres x, y, z, dans (154) et (155).

Enfin, les formules (150) et (153) montrent que les surfaces (Σ_1) et (Σ'_1) se correspondent : il en est donc de même des surfaces (Σ) et (Σ_1).

En résumé, dans le mouvement défini par les formules (148) *et* (149), *il existe, entraînées avec le trièdre* $O'x'y'z'$, *deux surfaces dont tous les points décrivent des sphères.*

L'une de ces surfaces (Σ'_1) *est un cylindre de révolution imaginaire.*

L'autre (Σ') *est un hyperboloïde ayant une génératrice et un plan de section circulaire perpendiculaires entre eux.*

38. En raison de l'intérêt particulier que présente le D. S. dont l'existence vient d'être reconnue, il convient de l'étudier avec quelque détail.

Cherchons en premier lieu à en donner une définition géométrique qui permette de le concevoir le plus nettement possible.

Remarquons à cet effet que la courbe, lieu du point O′, définie par les relations (148) et (149), a pour équations

$$\zeta = -\frac{a}{c}\xi, \tag{156}$$

$$\xi^2 + (\eta - 2a)^2 = 4c^2k^2, \tag{157}$$

comme on le trouve immédiatement par l'élimination de γ, μ, ν.

Cette courbe E est une ellipse, ayant son centre au point ω de coordonnées

$$0, \quad 2a, \quad 0.$$

Son petit axe, de longueur égale à $4ck$, est dirigé suivant Oy.

Son grand axe a pour longueur $4\sqrt{a^2+c^2}\,k$. Si donc on désigne par F et F_1 les deux foyers de E, on a

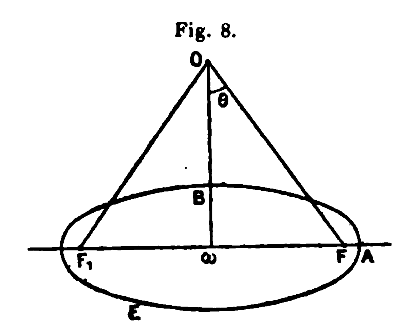
$$\omega F = 2ak,$$

d'où

$$k = \frac{\omega F}{\omega O} = \operatorname{tang}\theta,$$

en désignant par θ l'angle $\omega O F$.

Fig. 8.



On a ensuite

$$\gamma = \frac{-\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2}{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2} = \frac{1-k^2}{1+k^2} = \frac{1-\operatorname{tang}^2\theta}{1+\operatorname{tang}^2\theta} = \cos 2\theta,$$

$O'z'$ fait donc avec Oz un angle constant égal à 2θ.

On a des faits semblables, relativement au mouvement inverse de $Oxyz$ par rapport à $O'x'y'z'$.

On parvient, en résumé, à l'énoncé suivant (*fig.* 9) :

Soient E *une ellipse,* ω *son centre,* F *et* F_1 *ses deux foyers,* O *un point marqué sur le petit axe,* G *l'axe de l'un des cylindres de révolution qui contiennent l'ellipse* E.

Soit (E', O', G') *une figure égale à la figure* (E, O, G). *Déplaçons la figure* (E', O', G') *de manière à satisfaire aux conditions suivantes :*

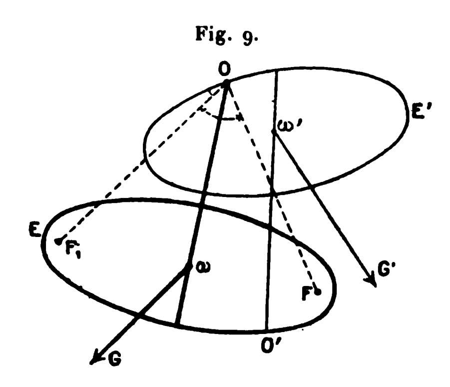
1° *Le point* O' *décrit* E ;

2° *L'ellipse* E' *passe constamment par le point* O ;

3° *Les directions* G, G' *font entre elles un angle constant égal à l'angle* $\widehat{FOF_1}$.

Enfin, comme il existe plusieurs mouvements satisfaisant aux conditions énoncées, on choisit celui pour lequel les deux figures (E, O, G), (E', O', G') *sont constamment symétriques par rapport à une droite* [1].

Fig. 9.



Dans le mouvement ainsi défini, les points d'un certain hyperbo-

---

[1] Supposons qu'on amène l'ellipse E' dans une position telle que le point O coïncide avec un certain point marqué sur cette ellipse. Le point O' sera à l'insersection de E' et d'une sphère de centre O et de rayon connu ; il existe quatre tels points : on choisira l'un de ceux qui sont placés sur E comme O' l'est sur E'. On fera ensuite tourner le plan de E' autour de la droite OO', de manière à satisfaire à la condition $\widehat{G, G'} = \widehat{FOF_1}$.

loïde (Σ'), *entraîné avec* E', *sont liés aux points d'un hyperboloïde fixe* (Σ), *égal à* (Σ'), *et placé par rapport à* E *comme* (Σ') *l'est par rapport à* E'.

39. Il faut maintenant chercher à définir, aussi simplement que possible, les hyperboloïdes (Σ) et (Σ') par rapport aux ellipses E et E'.

Posons à cet effet (*fig.* 8)

$$O\omega = 2a \;= L,$$

$$B\omega = 2ck = B,$$

$$\omega F = 2ak = C,$$

d'où

$$a = \frac{L}{2}, \qquad c = \frac{LB}{2C}, \qquad k = \frac{C}{L}.$$

L'équation (155) de l'hyperboloïde (Σ) s'écrit alors, en ayant égard à $p = 1 + k^2$,

$$2LB(x^2 + y^2) - 2LCxz - B(L^2 + C^2)y = 0,$$

et donne lieu aux remarques suivantes :

1° (Σ) contient l'axe Oz et la droite

$$Bx - Cz = 0, \qquad y = 0.$$

Or cette dernière droite est perpendiculaire au plan de l'ellipse (E), plan dont l'équation (156) peut s'écrire

$$C\xi + B\zeta = 0;$$

2° Ce dernier plan est un plan de section circulaire de (Σ), en vertu de l'identité

$$LB(x^2 + y^2) - LCxz - LB(x^2 + y^2 + z^2) = -Lz(Cx + Bz).$$

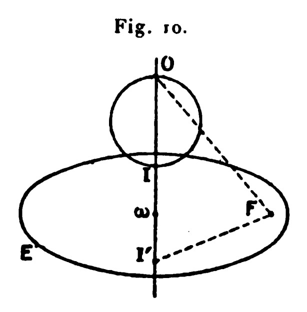
Le cercle Γ, trace de (Σ) sur le plan de E, a pour diamètre OI, le point I ayant pour coordonnées

$$x = 0, \qquad y = \frac{L^2 + C^2}{2L}, \qquad z = 0.$$

La construction de ce point I est immédiate, et nous pouvons compléter comme il suit les résultats du numéro précédent.

L'hyperboloïde (Σ) *est défini par les conditions suivantes* (*fig.* 10) :

Fig. 10.



Il a son centre dans le plan de E *et pour trace sur ce même plan un cercle de diamètre* OI : *le point* I *est milieu du segment* OI′, *le point* I′ *étant le point de rencontre de* Oω *et de la perpendiculaire élevée en* F *à la droite* OF.

Les deux génératrices de (Σ) *qui passent en* O *sont, l'une perpendiculaire au plan de* E *et l'autre, parallèle à la direction* G.

Enfin l'hyperboloïde (Σ'), *ainsi qu'on l'a vu, est défini par rapport à* E′ *comme* (Σ) *l'est par rapport à* E.

40. Voici maintenant quelques détails sur la correspondance qui existe entre les points liés des deux hyperboloïdes.

Les formules (150) et (153) définissent, dans le plan Oxy, une *inversion* suivie d'un *renversement* autour de Oy. La puissance de cette inversion est

$$a^2 p = a^2(1 + k^2) = \frac{L^2 + C^2}{4} = \frac{\overline{OF}^2}{4}.$$

Ainsi :

Soient Γ *et* Γ' *deux courbes liées appartenant respectivement aux hyperboloïdes* (Σ) *et* (Σ'). *La projection orthogonale de* Γ' *sur le plan* $O'x'y'$ *et l'inverse par rapport au point* O *de la projection orthogonale sur* Oxy *de la courbe* Γ, *la puissance d'inversion étant* $\frac{\overline{OF}^2}{4}$, *sont deux courbes égales.*

On déduit immédiatement de là que :

Les génératrices de (Σ'), *du même système que* $O'z'$, *sont liées à des cubiques gauches tracées sur* (Σ) *et projetées suivant des cercles sur le plan* Oxy.

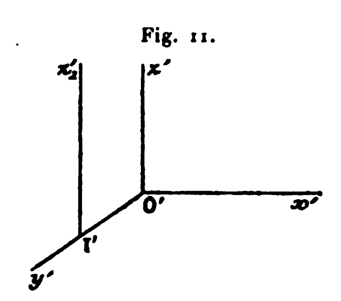
Les génératrices de (Σ'), *de système opposé à celui de* $O'z'$, *sont liées à des génératrices de* (Σ), *de système opposé à celui de* Oz.

Les formules qui font connaître le point m' de (Σ'), correspondant à un point m de (Σ), sont les suivantes, que l'on déduit sans peine de (150), (153) et (151), en tenant compte de (154)

$$x' = \frac{-a^2px}{x^2+y^2}, \qquad y' = \frac{a^2py}{x^2+y^2}, \qquad z' = \frac{cp(y-a)}{x}.$$

Elles permettent de trouver (*fig.* 11) quels sont les points de (Σ') qui sont liés aux points à l'infini de (Σ), c'est-à-dire qui décrivent des courbes

Fig. 11.



planes. On trouve que ce sont ceux des droites parallèles $O'z'$ et $I'z'_1$, suivant lesquelles le plan $O'y'z'$ coupe (Σ'). Les circonstances sont d'ailleurs différentes pour l'une et pour l'autre de ces deux droites :

Les points de $O'z'$ sont liés aux divers points à l'infini de (Σ). Autrement dit, les points de $O'z'$ restent dans des plans qui sont perpendiculaires aux diverses génératrices de (Σ).

Les points de $I'z'_1$ sont liés à un même point, savoir le point à l'infini de Oz. Autrement dit, tous les points de $I'z'_1$ restent dans des plans perpendiculaires à Oz.

41. Si l'on veut étudier d'une façon absolument complète le mouvement, il est avantageux de poser

$$\frac{\lambda}{\nu} = k \sin\varphi,$$

$$\frac{\mu}{\nu} = k \cos\varphi,$$

et la relation (149) se trouve satisfaite. Les formules (148) deviennent alors

$$\xi = 2kc\cos\varphi, \qquad \eta = 2(a - ck\sin\varphi), \qquad \zeta = -2ak\cos\varphi,$$

et les coordonnées d'un point quelconque $m'(x', y', z')$, entraîné avec le trièdre $O'x'y'z'$, sont données par les formules suivantes, où l'on a remplacé les cosinus $\alpha, \ldots, \gamma''$, par leurs valeurs en fonctions de φ:

$$X = 2kc\cos\varphi + \frac{k^2(1 - 2\cos^2\varphi) + 1}{1 + k^2} x' + \frac{2k^2 \sin\varphi\cos\varphi}{1 + k^2} y' + \frac{2k\sin\varphi}{1 + k^2} z',$$

$$Y = 2(a - ck\sin\varphi) + \frac{2k^2\sin\varphi\cos\varphi}{1 + k^2} x' + \frac{k^2(2\cos^2\varphi - 1) + 1}{1 + k^2} y' + \frac{2k\cos\varphi}{1 + k^2} z',$$

$$Z = -2ak\cos\varphi + \frac{2k\sin\varphi}{1 + k^2} x' + \frac{2k\cos\varphi}{1 + k^2} y' + \frac{1 - k^2}{1 + k^2} z'.$$

Si l'on transporte l'origine O en un point convenable, on peut faire disparaître de ces formules tous les termes qui ne sont pas fonctions de φ. Posons en outre, pour simplifier l'écriture,

$$\frac{x'}{1 + k^2} = x_1, \qquad \frac{y'}{1 + k^2} = y_1, \qquad \frac{z'}{1 + k^2} = z_1.$$

Il vient ainsi

$$X_1 = 2kc\cos\varphi - 2k^2x_1\cos^2\varphi + 2k^2y_1\sin\varphi\cos\varphi + 2kz_1\sin\varphi,$$
$$Y_1 = -2kc\sin\varphi + 2k^2x_1\sin\varphi\cos\varphi + 2k^2y_1\cos^2\varphi + 2kz_1\cos\varphi,$$
$$Z_1 = -2ak\cos\varphi + 2kx_1\sin\varphi + 2ky_1\cos\varphi,$$

en désignant par X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées du point m' par rapport aux nouveaux axes fixes.

On trouve aisément que les quantités $X_1^2 + Y_1^2$ et Z_1^2 sont toutes deux de la forme

$$g_1\cos^2\varphi + g_2\sin\varphi\cos\varphi + g_3\cos\varphi + g_4\sin\varphi + g_5.$$

Il en résulte que X_1, Y_1 et Z_1 satisfont à une relation de la forme

$$X^2 + Y^2 + A''Z^2 + CX + C'Y + C''Z + D = 0. \tag{158}$$

En effet, si dans cette relation on remplace $X^2 + Y^2$, Z^2, X, Y, Z par leurs valeurs en fonctions de φ, on obtiendra une relation linéaire par rapport à $\cos^2\varphi$, $\sin\varphi\cos\varphi$, $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$. En écrivant que cette relation est identiquement satisfaite, on formera cinq conditions qui permettront de déterminer les cinq coefficients A'', C, C', C'', D.

On peut donc énoncer le résultat suivant :

Tous les points entraînés avec le trièdre $O'x'y'z'$ décrivent des courbes situées sur des quadriques de révolution dont les axes sont parallèles à Oz

On trouve en outre que, dans le cas où le point m' appartient à l'hyperboloïde (Σ'), la relation (158) est indéterminée et peut s'écrire

$$X^2 + Y^2 + CX + C'Y + C''Z + D + \sigma(A''Z^2 + C_1X + C_1'Y + C_1''Z + D_1) = 0,$$

où σ est un paramètre arbitraire.

On en déduit que le point m' décrit une courbe sphérique, ce que l'on savait déjà. Cette courbe est de plus la biquadratique, base d'un faisceau linéaire de quadriques de révolution ayant leurs axes parallèles à Oz. C'est une *cartésienne,* suivant l'expression de M. Darboux. Cette courbe, étant unicursale, doit posséder un point double. Ainsi :

La trajectoire d'un point quelconque de (Σ') *est une cartésienne à point double, intersection d'une sphère et d'un cône de révolution tangent à cette sphère. L'axe du cône est parallèle à* Oz.

42. Le D. S. étudié présente un cas particulier intéressant : c'est celui où l'on a

$$c = 0.$$

L'équation (155) reste alors inaltérée, mais l'équation (154) se réduit à

$$xz = 0.$$

Ainsi, dans ce D. S., l'hyperboloïde (Σ) se décompose en les deux plans Oxy et Oxz. De même (Σ') se décompose en les deux plans $O'x'y'z'$ et $O'x'z'$. On retrouve ainsi les résultats que j'ai rappelés au Chapitre I (n° 3, VIII) : *le D. S. dont il s'agit s'effectue de telle manière que tout point du plan* $O'x'y'$ *reste lié à un point du plan* Oxy, *et que tout point du plan* $O'x'z'$ *reste lié à un point du plan* Oxz.

Pour une étude complète de ce D. S., et en particulier pour sa définition géométrique, je renvoie à mon Mémoire du *Journal de Mathématiques* [1].

---

[1] Je profite de l'occasion pour rectifier une erreur qui s'est glissée dans ce Mémoire : les droites du plan $O'x'z'$ sont liées à des *hyperboles* du plan Oxz, qui ne sont pas équilatères, comme je l'ai dit par mégarde.

NOTE.

Au cours de l'impression de ce travail j'ai eu connaissance du Mémoire de M. Borel, rédigé en réponse à la question proposée pour le concours du prix Vaillant en 1904, et que l'Académie a reconnu digne de la plus haute récompense [1].

La méthode de M. Borel ne se distingue pas essentiellement de celle dont j'ai fait usage aux Chapitres VII et VIII. Mais une discussion plus systématique, particulièrement en ce qui concerne le troisième et le quatrième des cas que j'ai énumérés au n° **30** (p. 63), le conduit à un grand nombre de solutions que je n'ai pas obtenues, et dont plusieurs sont d'une élégance remarquable.

Dans le travail de M. Borel comme dans le mien, le premier cas n'est pas traité; le deuxième est seulement effleuré. L'étude du premier cas n'est pas très engageante. Celle du deuxième cas semble devoir être plus féconde en résultats (*voir* le n° **31**, p. 64, du présent travail, et la rubrique D, p. 84, du Mémoire de M. Borel). Les formules (106), (107) et (108), que j'ai données au n° **29**, pourraient être d'une application utile dans cette recherche.

Ce n'est cependant pas, me semble-t-il, l'emploi d'une méthode exclusivement algébrique qui pourra conduire à la solution complète, et très désirable, du problème des déplacements à trajectoires sphériques. Une telle méthode entraîne nécessairement une discussion interminable et des calculs rebutants. D'autre part, la difficulté de donner une forme sensible à plusieurs des résultats déjà obtenus ne permet pas de supposer que la

---

[1] *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, t. XXIII : *Mémoire sur les déplacements à trajectoires sphériques.*

Géométrie pure puisse, dans cette question, se suffire à elle-même. Comme en beaucoup d'autres problèmes, c'est probablement à une méthode mixte, où la Géométrie interviendra pour *déblayer*, pour mettre rapidement en lumière des faits que le calcul est lent à révéler, que sera réservé le succès définitif.

SUR LES TURBINES A AXE FLEXIBLE;

PAR M. L. LECORNU.

Les turbines à vapeur tournent, comme l'on sait, avec une énorme vitesse : les turbines sans détente, telles que celle de Laval, effectuent jusqu'à 500 tours par seconde. Pour pouvoir donner à un solide une pareille rotation, il est indispensable de prendre des précautions particulières : Le profil méridien doit présenter une forme d'égale résistance à la force centrifuge, et il faut de plus que le système soit parfaitement équilibré; on arrive à faire en sorte que le centre de gravité ne se trouve pas à plus de $\frac{5}{1000}$ de millimètre de l'axe de rotation. L'expérience a montré d'ailleurs que le meilleur moyen de lutter contre les effets de l'inertie consiste à laisser à la tige une certaine flexibilité, grâce à laquelle la turbine se maintient dans l'espace en vertu de sa stabilité propre, analogue à celle d'une toupie, c'est-à-dire avec des vibrations imperceptibles, tandis qu'une tige rigide supporterait des efforts capables de la détériorer. Mais la flexibilité de la tige a l'inconvénient de permettre au centre de gravité des écarts variables par rapport à l'axe, et l'on constate que, pour certaines valeurs de la vitesse, l'appareil tend à présenter une allure désordonnée.

On peut se proposer d'étudier théoriquement le mouvement de la urbine. Pour prendre le problème sous sa forme la plus simple, imaginons que le système soit assimilé à un disque plan, placé exactement au milieu de la tige et rigoureusement normal à cette tige. Alors, par raison de symétrie, le disque se meut dans un plan fixe. Supposons que, quand il quitte sa position d'équilibre statique, il soit sollicité par une force de rappel appliquée au point A qui, au repos, coïncide avec un point O de l'axe, proportionnelle à l'écart OA et dirigée de A vers O. Admettons

enfin que les forces extérieures, motrices et résistantes, appliquées au système se fassent équilibre par rapport à l'axe de rotation, et cherchons, dans ces conditions, comment se meut le centre de gravité.

Le problème ainsi posé a été examiné par divers ingénieurs : en France, par MM. Brunet et Sosnowski; en Allemagne, par M. Föppl; en Belgique, par M. Stévart; en Suisse, par M. Stodola, etc., mais tous ces auteurs négligent les petites variations relatives de la vitesse angulaire du disque, dues à ce que la force de rappel ne passe pas au centre de gravité. Il m'a donc semblé intéressant de reprendre la question en tenant compte de cette circonstance qui, comme nous allons le voir, complique singulièrement le phénomène.

Soient x, y les coordonnées du centre de gravité de G, par rapport à deux axes rectangulaires fixes menés par O, θ l'angle de GA avec Ox, a la longueur constante GA, M la masse du disque, Mk^2OA la force de rappel appliquée en A.

En écrivant que G se meut comme un point libre, de masse M, soumis à l'action de la force de rappel, on obtient les deux équations

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -Mk^2(x + a\cos\theta),$$

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = -Mk^2(y + a\sin\theta),$$

ou bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2(x + a\cos\theta) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2(y + a\sin\theta) = 0. \tag{2}$$

D'autre part, la rotation autour de G s'effectue comme autour d'un point fixe. Si donc c désigne le rayon de gyration et si GH est la distance de G à OA, on a

$$Mc^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = Mk^2.OA.GH.$$

Mais OA.GH est le double de la surface du triangle OGA, égale à

$$\tfrac{1}{2}a(x\sin\theta - y\cos\theta).$$

Donc

$$c^2\frac{d^2\theta}{dt^2} - k^2 a(x\sin\theta - y\cos\theta) = 0. \tag{3}$$

Les équations (1), (2), (3), entre trois inconnues x, y, θ, définissent le mouvement du système.

Le théorème des moments des quantités de mouvement fournit une intégrale première. La seule force appliquée passant en O, la somme des moments des quantités de mouvement par rapport à ce point est constante; cette somme est d'ailleurs égale à la somme analogue par rapport à G augmentée du moment, par rapport à O, de la quantité de mouvement de G. D'après cela, si h est la constante d'intégration, on a

$$c^2\frac{d\theta}{dt} + x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = h. \tag{4}$$

Le théorème des forces vives fournit d'autre part l'intégrale

$$\begin{aligned} c^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \\ + k^2(x + a\cos\theta)^2 + k^2(y + a\sin\theta)^2 = \text{const.} \end{aligned} \tag{5}$$

Il paraît impossible de se procurer d'autres intégrales et, par conséquent, de parvenir à la solution générale et rigoureuse du problème.

Il y a une solution particulière très simple qu'on obtient en posant

$$x = \lambda\cos\theta, \qquad y = \lambda\sin\theta.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (3) et (4), on obtient

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0, \qquad (c^2 + \lambda^2)\frac{d\theta}{dt} = h,$$

$\frac{d\theta}{dt}$ a donc alors une valeur constante ω et λ est également constant. Le centre de gravité possède autour de O un mouvement circulaire et uniforme, et les trois points O, A, G sont en ligne droite. Les équations (1) et (2) donnent, en outre, dans ces conditions,

$$\omega^2\lambda = k^2(\lambda + a), \qquad \text{d'où} \qquad \lambda = \frac{k^2 a}{\omega^2 - k^2},$$

relation qu'on obtiendrait immédiatement en exprimant que la force centrifuge de G est égale à la force de rappel. Suivant que ω est supérieur ou inférieur à k, la valeur de λ est positive ou négative : cela signifie que dans un cas G est entre O et A, tandis que dans l'autre O se trouve entre G et A. Pour la valeur $\omega = k$, λ devient infini : il n'y a plus alors d'équilibre possible entre la force de rappel et la force centrifuge.

La solution qui précède, toute particulière qu'elle soit, met déjà en évidence l'existence d'une *vitesse critique* pour laquelle l'écart du centre de gravité tend à augmenter sans limite. Elle fait connaître d'ailleurs le seul cas pour lequel la rotation du disque puisse s'effectuer avec une vitesse constante. Il va sans dire que cette solution particulière ne saurait se réaliser que par un concours de circonstances tout à fait exceptionnel.

Nous allons maintenant procéder par voie d'approximation, en supposant que le rayon de gyration c est très grand par rapport à a ainsi que par rapport à la longueur GO. Si l'on pose

$$\frac{h}{c^2} = \omega, \qquad \frac{1}{c^2} = \varepsilon, \qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \frac{d\varphi}{dt},$$

l'équation (4) devient

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega - \varepsilon\frac{d\varphi}{dt},$$

d'où, à une constante près, $\theta = \omega t - \varepsilon\varphi$.

Vu la petitesse supposée des rapports $\frac{x}{c}, \frac{y}{c}$, la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ dif-

fère peu de la constante ω. Nous prendrons donc, pour première valeur approximative, $\theta = \omega t$.

Les équations (1) et (2) s'intègrent alors immédiatement et donnent

$$(6) \qquad \begin{cases} x = p\cos(kt+\alpha) + \lambda\cos\omega t, \\ y = q\sin(kt+\beta) + \lambda\sin\omega t, \end{cases}$$

en appelant p, q, α, β quatre constantes arbitraires et conservant la notation $\lambda = \frac{k^2 a}{\omega^2 - k^2}$.

D'après cela :

Si la vitesse angulaire est regardée comme ayant une valeur constante ω, le mouvement du centre de gravité s'obtient en composant une rotation uniforme de vitesse ω sur une circonférence de rayon λ, avec un mouvement elliptique à accélération centrale, possédant la période $\frac{2\pi}{k}$.

C'est la solution indiquée notamment par M. Föppl. On voit qu'elle laisse complètement de côté l'équation (3).

Pour passer à une seconde approximation nous aurons recours à la méthode de variation des constantes arbitraires. En vue d'abréger l'écriture, nous désignerons par des accents les dérivées prises par rapport au temps. Considérant p, q, α, β comme des fonctions du temps et imposant à ces fonctions les conditions

$$(7) \qquad \begin{cases} p'\cos(kt+\alpha) - p\alpha'\sin(kt+\alpha) = 0, \\ q'\sin(kt+\beta) + q\beta'\cos(kt+\beta) = 0, \end{cases}$$

nous avons (comme si p, q, α, β ne variaient point),

$$\begin{aligned} x' &= -pk\sin(kt+\alpha) - \lambda\omega\sin\omega t, \\ y' &= qk\cos(kt+\beta) + \lambda\omega\cos\omega t. \end{aligned}$$

Les dérivées secondes de x et y sont

$$x'' = -pk^2\cos(kt+\alpha) - \lambda\omega^2\cos\omega t$$
$$- p'k\sin(kt+\alpha) - pk\alpha'\cos(tk+\alpha),$$
$$y'' = -qk^2\sin(kt+\beta) - \lambda\omega^2\sin\omega t$$
$$+ q'k\cos(kt+\beta) - qk\beta'\sin(kt+\beta),$$

d'où, en tenant compte de la valeur de λ,

$$(8)\quad \begin{cases} x'' + k^2 x = -k^2 a\cos\omega t - p'k\sin(kt+\alpha) - pk\alpha'\cos(kt+\alpha), \\ y'' + k^2 y = -k^2 a\sin\omega t + q'k\cos(kt+\beta) - qk\beta'\sin(kt+\beta). \end{cases}$$

Nous voulons avoir

$$x'' + k^2 x = -k^2 a\cos\theta = -k^2 a\cos(\omega t - \varepsilon\varphi),$$
$$y'' + k^2 y = -k^2 a\sin\theta = -k^2 a\sin(\omega t - \varepsilon\varphi),$$

ou bien, *en négligent* ε^2,

$$(9)\quad \begin{cases} x'' + k^2 x = -k^2 a\cos\omega t - k^2 a\sin\omega t\ \varepsilon\varphi, \\ y'' + k^2 y = -k^2 a\sin\omega t + k^2 a\cos\omega t\ \varepsilon\varphi, \end{cases}$$

la comparaison des équations (8) et (9) donne

$$(10)\quad \begin{cases} p'\sin(kt+\alpha) + p\alpha'\cos(kt+\alpha) = ka\sin\omega t.\varepsilon\varphi, \\ q'\cos(kt+\beta) - q\beta'\sin(kt+\beta) = ka\cos\omega t.\varepsilon\varphi. \end{cases}$$

On tire alors, de (7) et (10),

$$(11)\quad \begin{cases} p' = ka\varepsilon\varphi\sin\omega t\sin(kt+\alpha), & q' = ka\varepsilon\varphi\cos\omega t\cos(kt+\beta), \\ p\alpha' = ka\varepsilon\varphi\sin\omega t\cos(kt+\alpha), & q\beta' = -ka\varepsilon\varphi\cos\omega t\sin(kt+\beta); \end{cases}$$

la fonction φ qui figure dans ces relations est définie par l'équation

$$\begin{aligned}\varphi' = xy' - yx' = pqk\cos(\alpha - \beta) + \lambda^2\omega \\ + \lambda q[k\cos\omega t\cos(kt + \beta) + \omega\sin\omega t\sin(kt + \beta)] \\ + \lambda p[k\sin\omega t\sin(kt + \alpha) + \omega\cos\omega t\cos(kt + \alpha)].\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}k &= u + v \\ \omega &= u - v\end{aligned} \qquad \text{d'où} \qquad k + \omega = 2u, \qquad k - \omega = 2v.$$

Il vient

$$(12)\quad \begin{aligned}\varphi' = pqk\cos(\alpha - \beta) + \lambda^2\omega + \lambda q[u\cos(2vt + \beta) + v\cos(2ut + \beta)] \\ + \lambda p[u\cos(2vt + \alpha) - v\cos(2ut + \alpha)].\end{aligned}$$

Les fonctions p, q, α et β sont variables; mais, d'après les équations (11), leurs variations sont de l'ordre ε. Si nous négligeons ces variations dans l'équation (12), nous commettons pour φ une erreur de l'ordre ε et, en portant cette valeur de φ dans le système (11), nous n'aurons, pour p, q, α, β, que des erreurs de l'ordre ε^2.

Regardons donc p, q, α, β comme constants dans l'équation (12) et intégrons. Il vient

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned}\varphi = [pqk\cos(\alpha - \beta) + \lambda^2\omega]t \\ + \frac{\lambda q}{2}\left[\frac{u}{v}\sin(2vt + \beta) + \frac{v}{u}\sin(2ut + \beta)\right] \\ + \frac{\lambda p}{2}\left[\frac{u}{v}\sin(2ut + \alpha) - \frac{v}{u}\sin(2vt + \alpha)\right].\end{aligned}\right.$$

CALCUL DE p'.

La valeur (13), portée dans la première équation du groupe (11), donne pour p' une expression compliquée. Mais le résultat se simplifie si nous laissons de côté les termes périodiques, dont la valeur moyenne est périodiquement nulle et ne dépasse jamais une quantité de l'ordre ε ; les

termes de cette nature, dont il serait d'ailleurs facile de tenir compte, ne peuvent introduire dans la valeur de p que des termes très petits, négligeables en présence de ceux qui croissent indéfiniment avec le temps. En outre, pour les termes périodiques dont la valeur moyenne n'est pas nulle, nous remplacerons la valeur vraie par cette valeur moyenne.

En vertu de l'identité

$$2\sin(mt+n)\sin(m't+n') \\ = \cos[(m'-m)t+n'-n]-\cos[(m'+m)t+n'+n],$$

un produit tel que $\sin(mt+n)\sin(m't+n')$, où m, m', n, n' sont des constantes quelconques, est la somme de deux termes périodiques à valeur moyenne nulle, à moins que l'on n'ait $m'=\pm m$.

Si $m'=m$, la valeur moyenne est $\frac{1}{2}\cos(n'-n)$. Si $m'=-m$, cette valeur moyenne est $\frac{1}{2}\cos(n+n')$.

Partant de cette remarque, et remplaçant d'autre part, dans la première équation (11), le produit :

$$\sin\omega t\sin(kt+\alpha) \qquad \text{par} \qquad \frac{1}{2}\cos(2vt+\alpha)-\frac{1}{2}\cos(2ut+\alpha),$$

on trouve sans peine que les termes conservés donnent

$$\frac{2p'}{ka\varepsilon}=-\frac{\lambda q}{4}\frac{u^2-v^2}{uv}(u^2-v^2)\sin(\alpha-\beta) \\ +[\cos(2vt+\alpha)-\cos(2ut+\alpha)][pqk\cos(\alpha-\beta)+\lambda^2\omega]t.$$

CALCUL DE q'.

Un calcul tout à fait analogue conduit pour q' à l'expression

$$\frac{2q'}{ka\varepsilon}=\frac{\lambda p}{4}\frac{u^2-v^2}{uv}\sin(\alpha-\beta) \\ +[\cos(2ut+\beta)+\cos(2vt+\beta)][pqk\cos(\alpha-\beta)+\lambda^2\omega]t.$$

CALCUL DE $p\alpha'$.

On trouve de même

$$\frac{2p\alpha'}{ka\varepsilon} = -\frac{\lambda q}{4}\frac{u^2-v^2}{uv}\cos(\alpha-\beta) - \frac{\lambda p}{4}\frac{u^2+v^2}{uv}$$
$$+ [pqk\cos(\alpha-\beta)+\lambda^2\omega]t[\sin(2ut+\alpha)-\sin(2vt+\alpha)].$$

CALCUL DE $q\beta'$.

Enfin

$$\frac{2q\beta'}{ka\varepsilon} = -\frac{\lambda p}{4}\frac{u^2-v^2}{uv}\cos(\alpha-\beta) - \frac{\lambda q}{4}\frac{u^2+v^2}{uv}$$
$$-[pqk\cos(\alpha-\beta)+\lambda^2\omega]t[\sin(2ut+\beta)+\sin(2vt+\beta)].$$

Nous voyons ainsi que dans chacune des expressions de p', q', α', β' figure un terme (qu'on peut appeler *terme séculaire*) contenant le facteur $[pqk\cos(\alpha-\beta)+\lambda^2\omega]t$. Si nous partons d'un instant initial pour lequel nous faisons $t=0$, ce terme commence par être nul, et, pendant un temps suffisamment court, il peut être regardé comme négligeable.

Plaçons-nous d'abord dans cette hypothèse. Nous obtenons alors le système d'équations

$$\begin{aligned}
p' &= -\frac{\lambda ka\varepsilon}{8}\frac{u^2-v^2}{uv}\sin(\alpha-\beta)q,\\
q' &= \frac{\lambda ka\varepsilon}{8}\frac{u^2-v^2}{uv}\sin(\alpha-\beta)p,\\
p\alpha' &= -\frac{\lambda ka\varepsilon}{8}\frac{u^2-v^2}{uv}\cos(\alpha-\beta)q - \frac{\lambda ka\varepsilon}{8}\frac{u^2+v^2}{uv}p,\\
q\beta' &= -\frac{\lambda ka\varepsilon}{8}\frac{u^2-v^2}{uv}\cos(\alpha-\beta)p - \frac{\lambda ka\varepsilon}{8}\frac{u^2+v^2}{uv}q.
\end{aligned}$$

Posant, pour abréger,

$$\frac{\lambda ka\varepsilon(u^2-v^2)}{8uv} = \mu, \qquad \frac{\lambda ka\varepsilon}{8}\frac{u^2+v^2}{uv} = \sigma,$$

il vient

$$p' = -\mu q \sin(\alpha - \beta), \qquad q' = \mu p \sin(\alpha - \beta),$$
$$p\alpha' = -\mu p \cos(\alpha - \beta) - \sigma p, \qquad q\beta' = -\mu p \cos(\alpha - \beta) - \sigma q$$

ou

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dp}{dt} = -\mu q \sin(\alpha - \beta), & \dfrac{dq}{dt} = \mu q \sin(\alpha - \beta), \\ p\dfrac{d\alpha}{dt} = -\mu q \cos(\alpha - \beta) - \sigma p, & q\dfrac{d\beta}{dt} = -\mu p \cos(\alpha - \beta) - \sigma q. \end{array} \right.$$

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS (14).

On aperçoit immédiatement la combinaison

$$p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} = 0,$$

d'où

$$p^2 + q^2 = R^2,$$

R étant une constante.

Posons alors

$$p = R\cos\psi, \qquad q = R\sin\psi.$$

Écrivons, en outre, pour abréger,

$$\alpha - \beta = \gamma.$$

Nous avons

$$\sin\psi \frac{d\psi}{dt} = \mu \sin\psi \cos\gamma$$

ou

$$(15) \qquad \frac{d\psi}{dt} = \mu \sin\gamma.$$

Puis

$$\cos\psi \frac{d\alpha}{dt} = -\mu \sin\psi \cos\gamma - \sigma \cos\psi,$$
$$\sin\psi \frac{d\beta}{dt} = -\mu \cos\psi \cos\gamma - \sigma \sin\psi,$$

d'où

$$\sin\psi\cos\psi\frac{d\gamma}{dt} = \mu\cos 2\psi\cos\gamma$$

ou bien

$$\tang 2\psi\frac{d\gamma}{dt} = 2\mu\cos\gamma. \tag{16}$$

Éliminant le temps entre (15) et (16), il vient

$$\frac{2\,d\psi}{\tang 2\psi} = \tang\gamma\,d\gamma.$$

L'intégration donne

$$\left\{\begin{aligned}&\log\sin 2\psi + \log\cos\gamma = \text{const.},\\ &\sin 2\psi\cos\gamma = \text{const.} = m\end{aligned}\right. \tag{17}$$

ou, ce qui revient au même,

$$2pq\cos\gamma = m\mathrm{R}^2. \tag{18}$$

L'équation (15) donne alors

$$dt = \frac{d\psi}{\mu\sin\gamma} = \frac{d\psi}{\mu\sqrt{1-\dfrac{m^2}{\sin^2 2\psi}}} = \frac{2\sin 2\psi\,d\psi}{2\mu\sqrt{1-m^2-\cos^2 2\psi}},$$

d'où

$$2\mu t = \arccos\left(\frac{\cos 2\psi}{\sqrt{1-m^2}}\right)$$

ou bien

$$\cos 2\psi = \sqrt{1-m^2}\cos 2\mu t. \tag{19}$$

Pour interpréter ces résultats, considérons l'ellipse représentée par les équations

$$x = p\cos(kt+\alpha),$$
$$y = q\sin(kt+\beta).$$

L'équation cartésienne de cette ellipse est

$$q^2x^2 + p^2y^2 + 2pq\sin\gamma\, xy - p^2q^2\cos^2\gamma = 0$$

ou

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{2xy}{pq}\sin\gamma = \cos^2\gamma.$$

Les directions principales correspondent à des angles polaires χ_1, χ_2 vérifiant la relation

$$(20)\qquad \operatorname{tang} 2\chi = \frac{2pq\sin\gamma}{q^2 - p^2} = \sin\gamma \operatorname{tang} 2\psi.$$

Les carrés ρ_1^2 et ρ_2^2 des axes sont les racines de l'équation

$$(21)\qquad \rho^4 - (p^2 + q^2)\rho^2 + p^2q^2\cos^2\gamma = 0.$$

On voit immédiatement que les axes sont de longueur constante. D'ailleurs l'équation (20), si l'on tient compte de (17) et (19), donne

$$\operatorname{tang} 2\chi = \frac{\sqrt{\sin^2 2\psi - m^2}}{\cos 2\psi} = \frac{\sqrt{1 - m^2 - \cos^2 2\psi}}{\cos 2\psi} = \operatorname{tang} 2\mu t,$$

d'où

$$\chi = \mu t.$$

Par conséquent, les axes de l'ellipse tournent avec la vitesse constante μ. En se reportant à la définition de μ, on trouve que cette vitesse est

$$\mu = \frac{\lambda k a \varepsilon (u^2 - v^2)}{8uv} = \frac{k^4 a^2 \omega\varepsilon}{2(k^2 - \omega^2)^2}$$

ou bien

$$\mu = -\frac{k^4\omega}{2(k^2 - \omega^2)^2} \times \frac{a^2}{c^2}.$$

Ce résultat, rapproché des équations (6), montre que les conclusions de M. Föppl doivent être modifiées en ce sens que l'ellipse, tout en conservant une grandeur constante, tourne autour de son centre avec la vitesse μ, qui grandit à mesure que ω approche de la vitesse critique k.

Nous avons fait usage des formules simplifiées (14) qui, d'après la façon dont elles ont été obtenues, sont valables seulement pour un très petit intervalle de temps, à moins que le coefficient du terme séculaire ne soit nul. Mais il est clair que, l'origine du temps étant arbitraire, ces deux faits : constance des axes de l'ellipse et constance de leur vitesse de rotation, doivent avoir un caractère permanent.

Remarquons d'ailleurs que, d'après l'équation (18), l'expression $pq\cos\gamma$ est constante et qu'il en est de même, dès lors, du coefficient $pq\cos\gamma + \lambda^2\omega$ du terme séculaire.

Ce coefficient, d'après l'équation (13), représente la valeur moyenne de φ'. D'autre part, nous avons $\frac{d\theta}{dt} = \omega - \varepsilon\varphi'$, c'est-à-dire que la valeur moyenne de $\frac{d\theta}{dt}$ (vitesse angulaire du disque) présente, par rapport à la constante ω, la petite différence $\varepsilon\varphi'$. Ceci étant, rien ne nous empêche de modifier la constante ω de telle façon qu'elle devienne rigoureusement égale à la valeur moyenne de $\frac{d\theta}{dt}$; alors la constante $pq\cos\gamma + \lambda^2\omega$ est nulle, et le terme séculaire disparait, ce qui rend les équations (14) valables pour un intervalle de temps quelconque.

En résumé :

A un premier degré d'approximation, il est permis de dire que le mouvement du centre de gravité s'obtient par la composition d'un mouvement circulaire et uniforme avec un mouvement elliptique à accélération centrale. Mais, dès qu'on passe au second degré d'approximation, c'est-à-dire dès qu'on tient compte de la seconde puissance du rapport $\frac{a}{c}$, *l'ellipse doit être considérée comme possédant autour de son centre une rotation uniforme, d'autant plus rapide qu'on approche davantage de la vitesse critique. En outre, au même degré d'approximation, le mouvement est troublé par un grand nombre de petites oscillations périodiques de durées différentes, dont le calcul, d'ailleurs aisé, serait long et dénué d'intérêt.*

SUR LES

COORDONNÉES PLÜCKÉRIENNES DE DROITE,

DANS L'ESPACE A $n-1$ DIMENSIONS;

PAR M. LÉON AUTONNE.

INTRODUCTION.

On sait le rôle important que jouent en Géométrie :

Soit la notion de l'espace *réglé,* c'est-à-dire envisagé comme lieu de droites,

Soit les coordonnées plückériennes d'une droite.

On trouvera, par exemple, dans le Livre de M. Kœnigs, *La Géométrie réglée et ses applications* (Gauthier-Villars, 1895), des renseignements circonstanciés, tant sur la théorie que sur son développement historique (Travaux de Malus, Plücker, Sophus Lie, M. Klein, etc.).

Les premières coordonnées de droites, introduites par Plücker dans sa *Neue Geometrie des Raumes,* sont les quatre paramètres a, b, g, h, pour la droite

$$x = az + g,$$
$$y = bz + h.$$

Plus tard, en coordonnées ponctuelles homogènes, on a pris pour la droite des deux points a_1 et a_2, définis par leurs coordonnées a_{1j} et a_{2j}, $\{i, j \leqq 4\}$, et, comme coordonnées plückériennes, les six déterminants

$$p_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i}$$

du Tableau

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{matrix} \right\|.$$

Les six variables homogènes p_{ij} sont liées par la relation fondamentale

$$\omega(p) = p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} = 0.$$

Ce sont les coordonnées tétraédriques. Enfin, on emploie aussi les coordonnées de M. Klein, six variables homogènes $\xi_1, \ldots, \xi_6$ liées par

$$\xi_1^2 + \ldots + \xi_6^2 = 0.$$

Il m'a paru intéressant d'étendre ces notions à un espace $\mathfrak{E}$, à un nombre quelconque $n-1$ de dimensions, où les points sont définis par n coordonnées homogènes.

Prenons m points a_i, $\{i = 1, 2, \ldots, m; m < n\}$ et leurs mn coordonnées a_{ij}.

Le lieu des points x, tels que leurs coordonnées x_j sont données par les relations

$$x_j = \sum_i t_i a_{ij}, \qquad t_i = \text{param. variable}, \qquad \{i \leqq m; j \leqq n\},$$

est par définition une *droite* p, ou p_m, de *degré* m. Un point est une droite de degré *un*; un plan est une droite de degré $n-1$.

La droite p est définie par

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{n-m}$$

coordonnées plückériennes homogènes,

$$p_l, \qquad \left\{ l = 1, 2, \ldots, \binom{n}{m} \right\},$$

déterminants à m^2 éléments du Tableau

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

On sait que les p_l sont liées par

$$\mathfrak{M}(n, m) = \binom{n}{m} - 1 - m(n - m)$$

relations fondamentales, homogènes, distinctes,

$$\varphi_\sigma(p) = 0, \qquad \{\sigma = 1, 2, \dots, \mathfrak{M}(n, m)\}$$

où l'on peut toujours prendre pour les φ_σ des formes quadratiques.

J'ai peu insisté sur cette matière des relations fondamentales. C'est un chapitre, aujourd'hui passablement connu, de la théorie des déterminants.

Je me suis borné :

A indiquer un procédé pour écrire immédiatement les équations $\varphi_\sigma = 0$;

A montrer que les coefficients des formes φ_σ ne dépendent pas de l'entier n, mais seulement de l'entier m.

Est établie ensuite une théorie de la dualité. Comme contre-partie des coordonnées-points p_l, s'introduisent des coordonnées-plans ϖ_l, lesquelles, du reste, coïncident avec les p_l, à l'ordre près.

Tel est l'objet de la première Partie.

Effectuons, dans l'espace $\mathfrak{E}$ et sur les coordonnées ponctuelles x_j, la collinéation ou substitution linéaire n-aire,

$$a = \left| x_j \quad \sum_k a_{jk} x_k \right|, \qquad \{j, k = 1, 2, \dots, n\}.$$

Les p_l se trouvent transformées par une substitution linéaire $\binom{n}{m}$-aire,

$$A = \Delta_m a = \left| p_g \quad \sum_l A_{gl} p_l \right|, \qquad \left\{ g, l = 1, 2, \ldots, \binom{n}{m} \right\}.$$

L'étude des dépendances mutuelles entre a et A constitue la matière de la deuxième Partie.

Les coefficients A_{gl} de A sont les $\binom{n}{m}^2$ mineurs m-aires, c'est-à-dire à m^2 éléments, du déterminant $|a_{jk}|$ des a_{jk}.

Nommons $\mathcal{A}$ la transformation géométrique que subit l'espace réglé $\mathfrak{E}$, à $n-1$ dimensions, quand les p_l subissent la collinéation A.

Les groupes $\bar{a}$, $\bar{A}$, $\bar{\mathcal{A}}$, des opérations a, A, $\mathcal{A}$ respectivement, sont isomorphes. On en discute l'hémiédrie.

Ici se présente une difficulté assez sérieuse : pour une opération $\mathcal{A}$ donnée, il n'est pas évident que la collinéation A soit définie sans ambiguïté.

Voici pourquoi :

Deux substitutions $\binom{n}{m}$-aires,

$$\left\{ g, g', l, l' = 1, 2, \ldots, \binom{n}{m} \right\},$$

$$A = \left| p_g \quad \sum_l A_{gl} p_l \right|, \qquad B = \left| p_g \quad \sum_l B_{gl} p_l \right|,$$

ne seront pas distinctes au point de vue géométrique si, pour toute combinaison de deux indices g et g', on a

$$\frac{\sum_l A_{gl} p_l}{\sum_l B_{gl} p_l} = \frac{\sum_{l'} A_{g'l'} p_{l'}}{\sum_{l'} B_{g'l'} p_{l'}},$$

ou encore

$$\Phi_{gg'}(p) = \begin{vmatrix} \sum A_{gl} p_l & \sum_{l'} A_{g'l'} p_{l'} \\ \sum_{l} B_{gl} p_l & \sum_{l'} B_{g'l'} p_{l'} \end{vmatrix} = 0.$$

Or toutes les formes quadratiques Φ ne pourraient-elles pas s'évanouir, sous le bénéfice des relations fondamentales?

La difficulté ne se présente pas pour la collinéation ponctuelle, car les coordonnées ponctuelles ne sont liées par aucune relation.

Grâce à une discussion un peu minutieuse, je suis parvenu à établir que, dans l'étude des relations mutuelles entre les substitutions linéaires a et A, on n'avait pas à se préoccuper des relations fondamentales : tout se passe comme si les p_l étaient variables indépendantes.

Le problème essentiel est celui-ci : quelles sont les conditions J, nécessaires et suffisantes, auxquelles doit satisfaire la $\binom{n}{m}$-aire A, pour qu'il existe au moins une n-aire a, telle qu'on ait

$$A = \Delta_m a?$$

Autrement dit : à quelles conditions J sont assujettis les $\binom{n}{m}^2$ coefficients A_{gl} de A pour devenir les $\binom{n}{m}^2$ mineurs m-aires d'un déterminant à n^2 éléments?

Il y a trois conditions J. La condition J_1, à peu près évidente, signifie que la collinéation A admet pour invariant le système des relations fondamentales.

Nommons *faisceau-point* ou *gerbe* le système des droites, qui ont en commun un point. La condition J_2 signifie que la transformation géométrique $\mathcal{A}$ change tout faisceau-point en un autre faisceau-point.

La condition J_3 est la contre-partie dualistique de la condition J_2.

J'indique un procédé régulier de calcul : 1° pour la vérification des conditions J (évanouissement de certains déterminants), sans irrationna-

lités; 2° pour la construction effective de la substitution a, quand A satisfait aux conditions J.

Dans la troisième Partie, on examine ce que fournissent les méthodes générales précédentes dans le cas de l'espace ordinaire : $n = 4$, $m = 2$, $\binom{n}{m} = 6$. Les conditions J sont celles-ci : « la substitution A a pour déterminant $+1$ et admet pour invariant absolu la forme quadratique

$$\omega(p) = p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24}. \text{ »}$$

Lyon, le 1er octobre 1905

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

I. — WEIERSTRASS, *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen* (*Monatsberichte de l'Académie de Berlin*, 1868, p. 310).

II. — FROBENIUS, *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* (*J. f. r. u. a. M.*, t. **84**, p. 1).

III. — KÖNIG (JULIUS), *Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen* (Teubner, Leipzig, 1903).

IV. — KOENIGS, *La Géométrie réglée et ses applications* (Gauthier-Villars, Paris, 1895).

V. — PASCAL, *Die Determinanten* (Teubner, Leipzig, 1900). On consultera surtout les paragraphes **22°** à **25°**, pages 83 à 103, et notamment les indications bibliographiques qui s'y trouvent.

VI. — AUTONNE, *Sur les Formes mixtes* (*Annales de l'Université de Lyon*, Rey, à Lyon; Gauthier-Villars, à Paris, 1905). On renvoie surtout aux Deuxième et Troisième Parties.

On renverra à la présente liste par une notation telle que celle-ci, par exemple :

(V, *Index*),

pour indiquer le livre de M. Pascal, qui porte le chiffre romain V de la liste.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

1°. Introduisons ou rappelons d'abord quelques définitions, notations ou locutions qui sont d'un usage continuel dans la suite.

2°. La notation

$$a = [a_{ij}] = (a_{ij}), \qquad \{ i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n \},$$

désignera le *tableau* à m lignes et à n colonnes

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Si $n = m$, on a un *tableau carré* ou *matrice n-aire*, qui aura un déterminant $|a|$. Un déterminant à n^2 éléments sera dit un déterminant *n-aire*. Un pareil déterminant aura des *mineurs q-aires*, c'est-à-dire à q^2 éléments, $q \leqq n$.

Un mineur q-aire sera évidemment un mineur d'ordre $n - q$, ou un mineur $(n - q)^{ième}$.

Un Tableau a fournira des déterminants ρ-aires, déterminants de matrice ρ-aires, $\{ \rho \leqq m; \rho \leqq n \}$. Si tous les mineurs $(r + 1)$-aires sont nuls, un au moins des mineurs r-aires étant différent de zéro, alors on dira que r est le *rang* du Tableau et l'on écrira

$$r = \mathrm{Rg}[a_{ij}].$$

Soit ϖ le plus petit (ou la valeur commune, dans le cas d'égalité) des

deux entiers m et n; on dira que le Tableau est *correct* si r atteint sa valeur maximum ϖ.

3°. Prenons la matrice n-aire $a = [a_{ij}]$. Si les éléments a_{ii}, *situés sur la diagonale principale,* sont seuls différents de zéro, la matrice devient canonique. Si les a_{ii} sont tous égaux à 1, on a la matrice n-aire *unité*, ou e.

La matrice a définit sans ambiguïté la *forme bilinéaire*

$$a(x;\ y) = \sum_{ij} a_{ij} y_i x_j$$

et la *substitution linéaire*

$$a = \left| z_i \quad \frac{a(z;\ u)}{\partial u_i} \right| = \left| z_i \quad \sum_j a_{ij} z_j \right|.$$

On écrira

$$a[z_i] = \sum_j a_{ij} z_j ;$$

la substitution a se désignerait alors par la notation

$$a = |z_i \quad a[z_i]| \qquad \text{et même} \qquad a = |z \quad a[z]|,$$

symboliquement. Pareillement pour une matrice n-aire $s = [s_{ij}]$, la notation *symbolique* $s[z] = 0$ signifiera le système des n équations

$$\sum_j s_{ij} z_j = 0.$$

La même notation symbolique vaudra aussi pour les Tableaux $a = [a_{ij}]$, $\{i \leqq m;\ j \leqq n\}$ et représentera le système des m équations à n inconnues z_j

$$a[z] = 0 \qquad \text{ou} \qquad \sum_j a_{ij} z_j = 0.$$

4°. Tout Tableau peut être changé en matrice par l'adjonction de lignes ou de colonnes, composées de zéros. Il suffira donc de considérer des matrices.

5°. Les deux matrices

$$a = [a_{ij}], \qquad a' = [a_{ji}] = [a_{ij}]'$$

sont *transposées* l'une de l'autre.

On sait que la matrice $c = ab$ ou *produit* des deux matrices n-aires

$$a = [a_{ik}], \qquad b = [b_{kj}], \qquad \{i, j, k \leqq n\},$$

est la n-aire

$$c = [c_{ij}] = \Big[\sum_k a_{ik} b_{kj} \Big].$$

Je renvoie au Mémoire de M. Frobenius (II, *Index*) pour les détails du calcul symbolique des matrices.

On s'assure aisément [*voir*, par exemple (VI, *Index*), à la page 7] que toutes les règles du calcul symbolique s'appliquent indifféremment aux

matrices,
formes bilinéaires,
substitutions linéaires.

Il est presque toujours inutile de distinguer les trois choses. Je dirai constamment la *n-aire* a, désignant indifféremment la matrice, la forme ou la substitution; je ne distinguerai qu'en cas de nécessité.

Dans les démonstrations, *on raisonnera sur les matrices*.

6°. Je suppose connue du lecteur la théorie des *Elementarteiler* de Weierstrass (I et II, *Index*). On la trouvera résumée à la page 8 et suivantes (VI, *Index*).

Elementarteiler est traduit par *successif*, sous-entendant facteur ou diviseur.

7°. La notation

$$\begin{bmatrix} a_{\alpha j} \\ b_{\beta j} \\ c_{\gamma j} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \left(\text{où } a = [a_{\alpha j}],\ b = [b_{\beta j}],\ \ldots \text{ sont des Tableaux à } j \text{ colonnes et à } \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \ldots \text{ lignes, } \{\alpha \leqq \bar{\alpha};\ \beta \leqq \bar{\beta};\ \ldots\}\right)$$

désignera le Tableau à n colonnes et à $m = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} + \ldots$ lignes, obtenu en écrivant au-dessous les uns des autres les Tableaux a, b, c, ...

8°. La notation

$$\mathrm{P}(\overset{\alpha}{x};\ \overset{\beta}{y};\ \overset{\gamma}{z};\ \ldots)$$

signifiera une expression (polynome ou fraction rationnelle) homogène

par rapport à des variables x, avec le degré α d'homogénéité,

par rapport à des variables y, avec le degré β, ...

9°. On emploiera quelquefois, pour désigner des Tableaux ou des matrices, certains schémas, qu'il convient d'expliquer une fois pour toutes.

Un Tableau à m lignes et à n colonnes peut être décomposé en Tableaux partiels. On écrira en ce cas

	λ	λ'	λ''	....
μ	a_1	a_2	a_3	......
μ'	b_1	b_2	b_3	......
μ''	d_1	d_2	d_3	......
$\vdots$	....			

$$m = \mu + \mu' + \mu'' + \ldots,$$

$$n = \lambda + \lambda' + \lambda'' + \ldots.$$

où, par exemple,

> a_1 est un Tableau à μ lignes et λ colonnes,
> d_1 est un Tableau à μ'' lignes et λ'' colonnes, etc.

Si, pour une matrice n-aire a, on a

$$\begin{array}{c|c|c|} & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \hline \mu_1 & \mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_2 \\ \hline \mu_2 & \mathrm{b}_1 & \mathrm{b}_2 \\ \hline \end{array} \qquad n = \lambda_1 + \lambda_2 = \mu_1 + \mu_2,$$

la transposée sera donnée par le schéma

$$a' = \begin{array}{|c|c|c} \mu_1 & \mu_2 & \\ \hline \mathrm{a}'_1 & \mathrm{b}'_1 & \lambda_1 \\ \hline \mathrm{a}'_2 & \mathrm{b}'_2 & \lambda_2 \\ \hline \end{array}$$

$\mathrm{a}'_1 =$ Tableau transposé du Tableau a_1,
$\mathrm{b}'_2 =$ » » b_2,
etc...

Un Tableau se *transpose* d'ailleurs en écrivant les lignes comme colonnes et réciproquement.

10°. Considérons deux matrices n-aires,

$$P = \begin{array}{|c|c|c} \lambda & n-\lambda & \\ \hline \mathrm{A} & \mathrm{B} & \lambda \\ \hline \mathrm{C} & \mathrm{D} & n-\lambda \\ \hline \end{array} \qquad Q = \begin{array}{|c|c|c} \lambda & n-\lambda & \\ \hline a & b & \lambda \\ \hline c & d & n- \\ \hline \end{array}$$

où

A et a sont deux matrices λ-aires;

D et d » $(n-\lambda)$-aires;

B et b sont deux Tableaux à λ lignes et $n-\lambda$ colonnes, etc.

On s'assurera, par un calcul simple, que l'on a

$$PQ = \underbrace{\begin{array}{|c|c|} \hline Aa+Bc & Ab+Bd \\ \hline Ca+Dc & Cb+Dd \\ \hline \end{array}}_{\lambda \quad\quad n-\lambda} \begin{array}{l} \} \lambda \\ \} n-\lambda \end{array} \qquad \{\text{formule (o)}\}.$$

Cette formule est susceptible de nombreuses applications.

Un zéro, mis dans une case du schéma, indique que le Tableau désigné a tous ses éléments nuls.

PREMIÈRE PARTIE.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COORDONNÉES PLUCKÉRIENNES.

CHAPITRE I.

Définition des coordonnées plückériennes.

1°. Dans un espace, à $n-1$ dimensions, $\mathfrak{E}$ prenons un point x par ses n coordonnées homogènes

$$x_j, \qquad \text{avec} \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

m points a_i, de coordonnées a_{ij}, $\{i = 1, 2, \ldots, m;\ m \leqq n\}$ seront dits *li-*

néairement distincts ou *linéairement indépendants* si l'on ne peut satisfaire aux n relations

$$\sum_i \lambda_i a_{ij} = 0,$$

qu'en annulant tous les m paramètres λ_i. Dans le cas contraire il y aura entre les m points a_i une *dépendance linéaire*.

2°. Pour que les m points soient linéairement indépendants, il faut et il suffit que le Tableau

$$\mathcal{A} = [a_{ij}],$$

à m lignes et n colonnes, ait le rang m et soit correct,

$$\mathrm{Rg}[a_{ij}] = m.$$

Considérons les

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \binom{n}{n-m},$$

combinaisons, telles que $j_1 \ldots j_m$, des n indices j, pris m à m. Numérotons ces diverses combinaisons par un indice l variant de *un* à $\binom{n}{m}$. Sauf avis contraire, les indices $j_1, j_2, \ldots, j_m$ seront supposés rangés en ordre croissant.

On peut alors désigner sans ambiguïté par

$$p_l, \qquad l = 1, 2, \ldots, \binom{n}{m}$$

les mineurs m-aires fournis par le Tableau $\mathcal{A}$. Le mineur obtenu en prenant les colonnes $j_1, j_2, \ldots, j_m$, dans l'ordre croissant des indices, est désigné par p_l, l'indice l correspondant à la combinaison $j_1 j_2 \ldots j_m$. On écrira aussi

$$p_l = (j_1 j_2 \ldots j_m).$$

3°. Considérons m points a_i linéairement distincts. Une *droite* p *de*

degré m sera *par définition* le lieu du point x, tel que

$$\text{(o)} \qquad x_j = \sum_i t_i a_{ij}; \qquad t_i = \text{param. variable.}$$

La droite p aura pour *coordonnées plückériennes homogènes* les $\binom{n}{m}$ paramètres p_l, ci-dessus introduits.

4°. Soit

$$\mathcal{D} = [d_{ii'}]; \qquad \{i, i' = 1, 2, \ldots, m\}, \qquad |\mathcal{D}| \neq 0,$$

une matrice m-aire. Le Tableau

$$\mathcal{D}\mathcal{A} = \Big[\sum_{i'} d_{ii'} a_{i'j}\Big],$$

de rang m, fournira, comme mineurs m-aires, les quantités

$$p_l |\mathcal{D}|.$$

Les deux Tableaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}\mathcal{A}$ donnent la même droite p.

Cela résulte aussi de la formule (o) du 3°, car l'expression

$$\sum_i t_i \sum_{i'} d_{ii'} a_{i'j}$$

est identique à

$$\sum_{i'} a_{i'j} \sum_i t_i d_{ii'}$$

et tout revient à effectuer sur les m paramètres variables t_i la collinéation $\mathcal{D}'$, transposée de $\mathcal{D}$. Cela évidemment est indifférent.

5°. Cette remarque permet, sans changer la droite p, de mettre le Tableau $\mathcal{A}$ sous une *expression réduite* plus simple.

Supposons qu'une des coordonnées p_l, par exemple p_0, soit différente

de zéro,

$$p_0 = (1\,2\,3\ldots m) \neq 0.$$

Nommons $\mathfrak{L}$ la matrice m-aire, telle que $p_0 = |\mathfrak{L}|$, obtenue en prenant les m premières colonnes de $\mathcal{A}$. Choisissons $\mathcal{Q}$ telle que $\mathcal{Q}\mathfrak{L} = p_0\,\mathrm{E}$, E étant la m-aire unité.

L'expression réduite sera, pour la droite p, et *par définition*,

$$m\left\{\underbrace{\boxed{p_0\,\mathrm{E}}}_{m}\underbrace{\boxed{\;\ldots\ldots\ldots\;}}_{n-m}\right. = \mathcal{Q}\mathcal{A},$$

ce qui revient à faire $a_{ii'} = 0$ pour $i' \neq i$, $i' \leqq m$, et $a_{ii} = p_0$. Tous les p_l sont multipliés par le déterminant p_0^{m-1} de $\mathcal{Q}$. Il y a évidemment autant d'expressions réduites, pour le Tableau $\mathcal{A}$, différentes, qu'il y a de p_l différents de zéro.

Je fais dans la suite grand usage des expressions réduites.

6°. Prenons maintenant une matrice n-aire, $\{j, j' = 1, 2, \ldots, n\}$

$$\mathcal{B} = [b_{jj'}], \qquad |\mathcal{B}| \neq 0.$$

Désignons par les indices l et l', pris dans la suite $1, 2, \ldots, \binom{m}{n}$, les deux combinaisons

$$j_1 j_2 \ldots j_m \qquad \text{et} \qquad j'_1 j'_2 \ldots j'_m$$

des n nombres $1, 2, \ldots, n$ pris m à m. Nommons

$$\mathrm{B}_{ll'} = \begin{pmatrix} j_1 j_2 \ldots j_m \\ j'_1 j'_2 \ldots j'_m \end{pmatrix}$$

le mineur m-aire de $\mathcal{B}$, obtenu en prenant, dans la matrice $\mathcal{B}$, les lignes d'indices $j_1, \ldots, j_m$ et les colonnes d'indices $j'_1, \ldots, j'_m$.

La matrice $\binom{n}{m}$-aire

$$B = [B_{ll'}], \qquad \left\{l, l' = 1, 2, \ldots, \binom{n}{m}\right\}$$

aura, comme on sait, son déterminant

$$|B| = |\mathfrak{B}|^{\sigma} \neq 0,$$
$$\sigma = \frac{m}{n} \cdot \binom{n}{m} = \frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!} = \binom{n-1}{m-1}.$$

On pourra effectuer, dans l'espace $\mathfrak{E}$, sur les points x la collinéation $\mathfrak{B}$.

7°. Par l'effet de cette collinéation le Tableau $\mathfrak{A}$ devient le Tableau

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}' = \left[\sum_{j'} b_{jj'} a_{ij'}\right].$$

Choisissons le mineur $p_l = (j_1 \ldots j_m)$ du Tableau $\mathfrak{A}$ et le mineur correspondant du Tableau $\mathfrak{A}\mathfrak{B}'$.

On aura évidemment

$$q_l = \sum_{l'} B_{ll'} p_{l'},$$

$B_{ll'}$ ayant la signification indiquée plus haut (6°).

La collinéation $\mathfrak{B}$, ponctuelle et n-aire, se traduit sur les coordonnées plückériennes p_l, par la *collinéation* $\binom{n}{m}$-aire B,

$$B = \left| p_l, \qquad \sum_{l'} B_{ll'} p_{l'} \right|.$$

La collinéation B, considérée géométriquement, remplace la droite p, dont les p_l sont les coordonnées, par la droite q, ayant pour coordonnées les q_l. On dira que q est l'*image* de p par B et l'on écrira

$$q = B[p].$$

8°. Si l'on effectue sur les x_j les diverses collinéations n-aires

$$\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{B}^{(1)}, \quad \mathfrak{B}^{(2)}, \quad \ldots$$

d'un groupe $\overline{\mathfrak{B}}$, on opérera sur les q_t les collinéations $\binom{n}{m}$-aires correspondantes

$$B, \quad B^{(1)}, \quad B^{(2)}, \quad \ldots$$

d'un groupe $\overline{B}$. *Les deux groupes* $\overline{\mathfrak{B}}$ *et* $\overline{B}$ *sont évidemment isomorphes.*

9°. Une matrice $\binom{n}{m}$-aire telle que B n'est évidemment pas la $\binom{n}{m}$-aire générale. Les $B_{tt'}$ sont, au contraire, liées par des sujétions fort étroites que l'on étudiera plus bas (Seconde Partie).

De même on examinera aussi de plus près (au Chapitre VII) l'isomorphisme des groupes $\overline{\mathfrak{B}}$ et $\overline{B}$.

CHAPITRE II.

Relations fondamentales.

10°. Les $\binom{n}{m}$ quantités p_t, coordonnées de la droite p et mineurs m-aires du Tableau $\mathfrak{A} = [a_{ij}]$, ne peuvent pas être choisies simultanément d'une façon arbitraire. Les p_t, au contraire, sont liées (Pascal, p. 115 à 124) par des relations algébriques qui se réduisent à

$$\binom{n}{m} - 1 - m(n-m) = \omega(n, m)$$

distinctes. Nous dirons que ces relations sont *fondamentales* et forment le *système fondamental* $\Omega(n, m)$.

Je me propose de compléter, sur cette matière, l'analyse de M. Pascal, dans la mesure nécessaire à mon objet.

11°. Parmi les p_t, prenons, par exemple, $p_0 = (12\ldots m) \neq 0$ et met-

tons le Tableau $\mathcal{A}$ sous l'expression réduite (5°)

$$\mathcal{L} = \begin{array}{c|c|c|l} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{m} & \multicolumn{1}{c}{n-m} & \\ \cline{2-3} & \;\Gamma\; & \quad C \quad & m \\ \cline{2-3} \end{array}$$

où Γ est la matrice m-aire $p_0 \mathrm{E}$, tandis que C est un Tableau à m lignes et n-m colonnes. Dans Γ les seuls éléments non nuls sont ceux de la diagonale principale, qui sont tous égaux à p_0.

Un mineur h-aire de Γ, non nul, est égal à $\pm p_0^h$, $h \leqq m$. Un mineur nul peut aussi être considéré comme divisible par p_0^h. Donc *tout mineur h-aire de* Γ *est divisible par* p_0^h.

12°. Dans les Tableaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{L}$, on nommera *correspondants* les mineurs m-aires p_l (pour $\mathcal{A}$) et P_l (pour $\mathcal{L}$) formés avec m colonnes de mêmes indices. On a vu (5°) que $\mathrm{P}_l = p_l p_0^{m-1}$.

13°. Prenons, dans le Tableau $\mathcal{L}$, un mineur h-aire L, $h \leqq m$.

Les h lignes de L, par leur intersection avec la diagonale principale du Tableau carré Γ, définissent, dans Γ, h colonnes. Considérons les m-h colonnes restantes de Γ.

Adjoignons ces m-h colonnes aux h colonnes de $\mathcal{L}$, qui figurent dans L. Nous obtiendrons ainsi, pour L donné et sans aucune ambiguïté, un certain déterminant P_l. Dans ce P_l là, chacune des m-h colonnes empruntées à Γ aura un seul élément égal à p_0 et les autres nuls. Il viendra, comme on le voit facilement,

$$\mathrm{P}_l = \mathrm{L} p_0^{m-h}.$$

Mais déjà

$$\mathrm{P}_l = p_l p_0^{m-1},$$

d'où

$$\mathrm{L} = p_l p_0^{h-1}.$$

C'est une propriété qui peut s'énoncer ainsi :

THÉORÈME. — *Tout déterminant h-aire, mineur du Tableau* $\mathcal{L}$, *est, au*

signe près, le produit par p_0^{h-1} d'un certain p_l, défini sans aucune ambiguïté, $h \leqq m$.

Je dis *au signe près,* parce que, dans le raisonnement ci-dessus, on a fait abstraction de l'ordre des colonnes dans les déterminants.

14°. Faisons, en particulier, $h = 1$. Le théorème montre que les éléments des Tableaux $\mathfrak{L}$, Γ et C sont des quantités p_l.

Posons notamment $C = [c_{ik}]$, $\{i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n-m\}$. Pour avoir c_{ik} il faut faire (**13°**) $h = 1$; alors le p_l qui s'introduit emprunte $m - 1$ colonnes à la matrice Γ et *possède $m - 1$ indices communs avec le déterminant p_0.*

Pour achever le calcul de c_{ik}, écrivons, avec les notations du **2°**,

$$\begin{aligned} P_l &= (1, 2, 3, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m, m+k) \\ &= (-1)^{m+1-i}(1, 2, 3, \ldots, i-1, m+k, i+1, \ldots, m) \\ &= (-1)^{m+1-i} c_{ik} p_{m-1}^0. \end{aligned}$$

D'où, p_l correspondant à P_l (**12°**),

$$c_{ik} = (-1)^{m+1-l} p_l.$$

Nommons *catégorie* d'une p_l, pour la *base* p_0, le nombre d'indices qui figurent dans p_l, sans figurer dans p_0, c'est-à-dire supérieurs à m. On voit que *les éléments c_{ik} du Tableau* C *sont des p_l de première catégorie.*

Combien y a-t-il de p_l possédant la catégorie h, $h \leqq m$?

Une pareille p_l possède :

h indices de colonnes, choisis dans la suite

$$m+1, \quad m+2, \quad \ldots, \quad n,$$

c'est-à-dire de

$$\binom{n-m}{h} = \frac{(n-m)!}{h!(n-m-h)!}$$

façons possibles;

$m - h$ indices choisis dans la suite 1, 2, ..., m, c'est-à-dire de

$$\binom{m}{m-h}$$

façons possibles.

La catégorie h fournit ainsi

$$\binom{n-m}{h} \binom{m}{m-h}$$

quantités p_l.

Il y a notamment $m(n-m)$ coordonnées p_l de première catégorie. Ce sont précisément les $m(n-m)$ éléments c_{ik} du Tableau C. p_0 est la seule p de catégorie *zéro*.

La catégorie ne peut évidemment dépasser ni m ni $n-m$.

15°. Prenons une p_l de catégorie h. Le P_l, mineur correspondant du Tableau $\mathfrak{L}$, empruntera h colonnes au Tableau C et $m-h$ colonnes au Tableau Γ; il viendra $P_l = p_0^{m-h}\Lambda$, où Λ est un mineur h aire du Tableau C, c'est-à-dire un polynome homogène de dimension h par rapport aux quantités c_{ik}, qui sont des p_l de catégorie *un*.

D'autre part $P_l = p_l p_0^{m-1}$ (5°). Finalement

$$p_l p_0^{h-1} = \Lambda. \tag{o}$$

Cette formule permet d'exprimer rationnellement toutes les $\binom{n}{m}$ quantités p_l, à l'aide de p_0 et des $m(n-m)$ quantités p_l de première catégorie.

Les formules (o) sont au nombre de

$$\binom{n}{m} - 1 - m(n-m),$$

puisqu'il y a pareil nombre de p_l avec une catégorie supérieure à 1.

Ce sont les relations fondamentales (a) de la page 121 du livre de M. Pascal. Elles apparaissent comme un corollaire du théorème du **13°**.

16°. Cette manière d'écrire le système fondamental $\Omega(n, m)$ (**10°**) conduit à annuler des fonctions homogènes des p_l, jusqu'à la dimension m inclusivement.

M. Pascal a montré que l'on peut toujours s'arranger de façon à n'avoir à annuler que des formes quadratiques des p_l.

Je vais généraliser l'analyse de Pascal (p. 121 à 124).

17°. On obtient un nombre considérable de relations fondamentales quadratiques en opérant de la façon suivante.

Reprenons **11°** les Tableaux C et $\mathcal{L}$, la matrice Γ. Choisissons dans C

$$h = h' + h''$$

indices de lignes et répartissons-les en deux suites $\alpha_1 \ldots \alpha_{h'}$, et $\beta_1 \ldots \beta_{h''}$. Puis combinons ces h lignes avec h colonnes $g_1 \ldots g_h$ de C, de façon à avoir une matrice h aire $\mathcal{H}$.

Répartissons, de toutes les façons possibles, les h colonnes $g_1 \ldots g_h$ en deux suites $\gamma_1 \ldots \gamma_{h'}$ et $\delta_1 \ldots \delta_{h''}$.

Nommons, par exemple,

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_{h'} \\ \gamma_1 \ldots \gamma_{h'} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} \beta_1 \ldots \beta_{h''} \\ \delta_1 \ldots \delta_{h''} \end{pmatrix}$$

les mineurs h'-aire et h''-aire de C, obtenus en combinant les lignes

$$\alpha_1 \ldots \alpha_{h'}$$

avec les colonnes $\gamma_1 \ldots \gamma_h$, etc.

Le déterminant $|\mathcal{H}|$ de la matrice $\mathcal{H}$ est

$$\sum \pm \mathcal{L}\mathcal{M},$$

où la sommation s'étend aux $\binom{h}{h'}$ façons de former les deux suites des γ et des δ.

Dans le théorème du **13°**, il correspond à $\mathcal{L}$ une certaine

$$p_l = (k'_1 \ldots k'_{m-h'}; \gamma_1 \ldots \gamma_{h'})$$

ainsi formée : les colonnes $k'_1 \ldots k'_{m-h'}$ subsistent dans la matrice Γ quand on a supprimé les h' colonnes, qui passent par l'intersection de la diagonale principale de Γ avec les h' lignes de $\mathfrak{L}$.

Le théorème du 13° donne

$$\mathfrak{L} = (k'_1 \ldots k'_{m-h'}; \gamma_1 \ldots \gamma_{h'}) \times p_0^{h'-1}$$

et, de même,

$$\mathfrak{M} = (k''_1 \ldots k'_{m-h''}; \delta_1 \ldots \delta_{h''}) \times p_0^{h''-1}.$$

Si les deux suites $\alpha_1 \ldots \alpha_{h'}$ et $\beta_1 \ldots \beta_{h''}$ n'ont pas d'indices communs, $|\mathfrak{K}|$ est un certain mineur h-aire de C et, en vertu du même théorème,

$$|\mathfrak{K}| = p_0^{h-1} \mathrm{H},$$

H étant une certaine p_l.

Il vient alors

$$p_0^{h-1} \mathrm{H} = p_0^{h'+h''-2} \sum \pm (k'_1 \ldots; \gamma_1 \ldots)(k''_1 \ldots; \delta_1 \ldots),$$

c'est-à-dire, puisque $h = h' + h''$,

$$p_0 \mathrm{H} = \sum \pm (k'_1 \ldots; \gamma_1 \ldots)(k''_1 \ldots; \delta_1 \ldots)$$

relation fondamentale quadratique.

Si les deux suites $\alpha_1 \ldots \alpha_{h'}$ et $\beta_1 \ldots \beta_{h''}$ ont des indices communs,

$$|\mathfrak{K}| = 0$$

et l'on a la relation fondamentale quadratique

$$0 = \sum \pm (k'_1 \ldots; \gamma_1 \ldots)(k''_1 \ldots; \delta_1 \ldots).$$

On aura encore des relations fondamentales quadratiques en traitant dans le déterminant $|\mathfrak{K}|$ les lignes comme des colonnes et réciproquement.

18°. Ces relations fondamentales quadratiques ne sont évidemment

pas distinctes des relations quadratiques (b) de M. Pascal (PASCAL, p. 122).

Je n'insisterai pas davantage sur la construction effective du système $\Omega(n, m)$ des relations fondamentales. $\Omega(n, m)$ peut s'écrire d'une infinité de façons différentes, dont l'énumération complète paraît ardue. Pour plus de détails, je ne puis que renvoyer à l'exposé précité de M. Pascal.

Par contre, je développerai quelques explications générales utiles à mon objet.

19°. De l'analyse qui précède (**13°** à **15°**), on peut déduire encore une remarque.

Soit un Tableau $\mathcal{A} = [a_{ij}]$, $\{i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$, qui donne une droite p de coordonnées p_l. Sans changer p, on peut prendre pour $\mathcal{A}$ l'expression réduite et faire $\Gamma = E$, $p_0 = 1$. Alors, dans la matrice Γ, les éléments sont zéro ou p_0 ; dans le Tableau $C = [c_{ik}]$, $\{k = 1, 2, \ldots, n - m\}$, les c_{ik} sont au signe près des p_l de première catégorie (**14°**). Bref, « il est licite de supposer que, dans le Tableau $\mathcal{A}$, qui fournit la droite p, tous les éléments, au signe près, sont des coordonnées p_l de la droite. »

20°. THÉORÈME. — $\binom{n}{m}$ *quantités quelconques q_l, liées par le système fondamental $\Omega(n, m)$, sont toujours les coordonnées p_l d'une et d'une seule droite p.*

Comme les q_l satisfont au système Ω, on sait à quelle coordonnée p_l doit correspondre chaque q_l. Supposons $q_0 \neq 0$ et $q_0 = 1$. On saura disposer les q_l [en changeant convenablement (**14°**) le signe de quelques-unes des q_l] de façon à écrire l'expression réduite (**11°**) $\mathcal{L}$ d'un Tableau, la matrice Γ, le Tableau $C = [c_{ik}]$ où c_{ik} est au signe près une certaine q_l. Alors, en vertu des relations fondamentales (**15°**), le mineur m-aire p_l du Tableau $\mathcal{L}$ est proportionnel à q_l.

Il existe donc au moins une droite p, fournie par le Tableau $\mathcal{L}$, et dont les coordonnées sont proportionnelles aux q_l. Existe-t-il encore une autre droite p' ayant ses coordonnées proportionnelles aux q_l?

Le lemme, que nous établissons plus bas, permet de répondre par la négative et achève la démonstration du théorème.

21°. Lemme. — *Une droite est définie sans ambiguïté par ses coordonnées q_l.*

Soient $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ et $\mathcal{A}' = [a'_{ij}]$ deux Tableaux,

$$\{i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\},$$

tels que leurs mineurs m-aires p_l et p'_l soient proportionnels aux q_l.

Je dis que les deux Tableaux définissent, au sens des 3° et 4°, la même droite.

Il est licite d'admettre que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont tous deux sous l'expression réduite (5°), et écrire, puisque $q_0 = (12\ldots m) \neq 0$,

$$\begin{array}{lll} & \overset{m}{}\ \ \overset{n-m}{} & \\ \mathcal{A} = \boxed{E \mid C}\ m, & C = [c_{ik}] & \\ & & \{k = 1, 2, \ldots, n-m\}, \\ \mathcal{A}' = \boxed{E' \mid C'}, & C' = [c'_{ik}] & \end{array}$$

avec nos notations habituelles.

Il vient d'abord $p_0 = 1$, $p'_0 = 1$.

Prenons maintenant le mineur

$$p_l = (12\ldots i-1, m+k, i+1\ldots m)$$

obtenu en remplaçant, dans p_0, la $i^{\text{ième}}$ colonne, par la colonne $k^{\text{ième}}$ de C, c'est-à-dire $(m+k)^{\text{ième}}$ de $\mathcal{A}$. On a évidemment (14°)

$$(-1)^{m+1-i} p_l = c_{ik}$$

et, de même,

$$(-1)^{m+1-i} p'_l = c'_{ik}.$$

La proportionnalité des p_l et p'_l aux q_l donne, puisque $p_0 = p'_0 = 1$,

$$c_{ik} = c'_{ik},$$

c'est-à-dire, dans les Tableaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$, $a'_{ij} = \rho a_{ij}$, $\rho =$ facteur de proportionnalité.

Autrement dit : les m points a_i, qui définissent (3°) la droite fournie par le Tableau $\mathcal{A}$, coïncident avec les m points a'_i, qui définissent le Tableau $\mathcal{A}'$.

Les deux Tableaux fournissent ainsi la même droite. C. Q. F. D.

22°. Comme application, prenons le cas le plus simple, $m = 2$, $n = 4$. Ω se réduit à une relation fondamentale unique.

Posons

$$\mathcal{A} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{matrix} \right\| = [a_{ij}], \qquad p_{\alpha\beta} = \left| \begin{matrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} \end{matrix} \right|.$$

Sous expression réduite, $\mathcal{A}$ s'écrira, si $p_{12} \neq 0 = 1$,

$$\mathcal{A} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & 1 & c_{21} & c_{22} \end{matrix} \right\| = \underbrace{\overbrace{\boxed{\mathrm{E}}}^{2}\overbrace{\boxed{\mathrm{C}}}^{2}}_{4} \Big\} 2,$$

$$\begin{aligned} p_{12} &= 1, & p_{34} &= |\mathrm{C}|, \\ p_{23} &= -c_{11}, & p_{14} &= c_{22}, \\ p_{31} &= -c_{21}, & p_{24} &= -c_{12}. \end{aligned}$$

Si les coordonnées de la droite sont données, le Tableau $\mathcal{A}$ s'en déduit sans aucune ambiguïté.

CHAPITRE III.

Relations fondamentales quadratiques.

23°. Dans le Tableau $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ considérons les m éléments a_{ij} de la $j^{\text{ième}}$ colonne. Chaque p_l est homogène : 1° avec le degré un, par rap-

port aux a_{ij}, si p_l contient la colonne j; 2° avec le degré zéro, si la colonne j manque dans p_l.

Pour exprimer cette propriété, je dirai que p_l est homogène, avec le degré un ou zéro d'homogénéité, *par rapport à l'indice j*.

Considérons un produit de N facteurs

$$\prod_\lambda p_\lambda, \qquad \lambda = l, l', \ldots, l^{(N)},$$

égaux ou distincts. Si l'indice j figure dans $\nu \leqq N$ des N facteurs, on dira que le produit possède par rapport à l'indice j le degré ν.

Un polynome est homogène par rapport à l'indice j, si tous les termes ont, par rapport à j, le même degré.

24°. Soit $\Psi(p)$ un polynome homogène et de degré N par rapport aux p_l. Supposons que Ψ s'évanouisse identiquement pour toute droite p. Autrement dit, l'égalité $\Psi = 0$ est une conséquence des relations fondamentales. Je me propose d'examiner quelques propriétés générales de Ψ.

25°. Prenons un indice j dans la suite $1\,2\ldots n$ et écrivons

$$\Psi = \sum_\nu \Psi_\nu = \Psi_\nu + \Psi_{\nu'} + \ldots,$$

où Ψ_ν est l'ensemble des termes de Ψ, qui possèdent, par rapport à l'indice j, le degré ν d'homogénéité.

Si l'on effectue, dans l'espace $\mathfrak{E}$, la collinéation ponctuelle $\mathfrak{B}$ du **6°**, les coordonnées

$$q_l = \sum_{l'} \mathrm{B}_{ll'} p_{l'}$$

de la droite $q = \mathrm{B}[p]$ (**7°**), image, par la collinéation

$$\binom{n}{m}\text{-aire} \qquad \mathrm{B} = [\mathrm{B}_{ll'}],$$

de la droite p, satisfont, tout comme les p_l, aux relations fondamentales.

Autrement dit, le système fondamental $\Omega(n, m)$ est un invariant vis-à-vis de la collinéation B.

Si l'on a $\Psi(p) = 0$, on a aussi, toujours en vertu de $\Omega(n, m)$,

$$\Psi(q) = 0.$$

26°. Prenons pour la collinéation $\mathfrak{B}$ la canonique n-aire

$$\mathfrak{B} = |x_\alpha, \quad t_\alpha x_\alpha| \qquad \{\alpha = 1, 2, \ldots, n\},$$
$$t_\alpha = 1 \quad \text{pour} \quad \alpha \neq j, \qquad t_j = t.$$

La collinéation B multipliera par 1 tous les p_l où manque l'indice j, et par t tous les p_l où figure l'indice j.

Par l'effet de B, Ψ devient

$$t^\nu \Psi_\nu + t^{\nu'} \Psi_{\nu'} + \ldots;$$

la relation $\Psi = 0$ se décompose, puisque t est quelconque, en plusieurs relations

$$\Psi_\nu = 0, \qquad \Psi_{\nu'} = 0, \qquad \ldots,$$

toutes homogènes par rapport à l'indice j. En résumé : *si un polynome homogène $\Psi(p)$ s'évanouit en vertu des relations fondamentales, alors il est licite de supposer que Ψ possède aussi l'homogénéité par rapport à chacun des n indices* $1, 2, \ldots, n$.

Corollaire. — *Ψ ne peut contenir aucune puissance* N^{ième}.

Soit, par exemple,

$$\Psi = \mathrm{a}\, p_0^{\mathrm{N}} + \mathrm{a}' p_0^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots + \ldots,$$
$$\mathrm{a} = \mathrm{a}' = \ldots = \text{const.}, \qquad \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots = \mathrm{N},$$
$$\mathrm{a} \neq 0.$$

Soit j un quelconque des m indices de p_0 ; j doit figurer dans chacune

des coordonnées p_1, p_2, ... Donc les coordonnées p_1, p_2, ... se confondent avec p_0 et

$$\Psi = a p_0^N.$$

La relation $\Psi = 0$ entraîne $p_0 = 0$, ce qui est évidemment absurde.
Donc $a = 0$. C. Q. F. D.

27°. Faisons en particulier $N = 1$ et

$$\Psi = \sum_l a_l p_l.$$

On devra avoir $a_l = 0$. Donc

Les coordonnées p_l d'une droite sont linéairement indépendantes.

Ce théorème nous sera utile dans la suite.

28°. Faisons $N = 2$ et écrivons

$$\Psi = a p_1 p_2 + a' p_3 p_4 + \ldots,$$
$$p_1 = (j_1 \ldots j_g;\, j'_1 \ldots j'_{m-g}),$$
$$p_2 = (j_1 \ldots j_g;\, j''_1 \ldots j''_{m-g}),$$

les $2(m-g)$ indices j' et j'' étant tous distincts.

Chacun des indices j doit figurer à la fois dans p_3 et dans p_4, tandis que chacun des indices j' ou j'' figure soit dans p_3, soit dans p_4. Ainsi

$$p_3 = (j_1 \ldots j_g;\; t_1 \ldots t_{m-g}),$$
$$p_4 = (j_1 \ldots j_g;\; t'_1 \ldots t'_{m-g}),$$

la suite $t_1 \ldots t_{m-g} t'_1 \ldots t'_{m-g}$ coïncidant, à l'ordre près, avec la suite des j' et j''.

Ψ ne contient donc pas la totalité des n indices, mais seulement

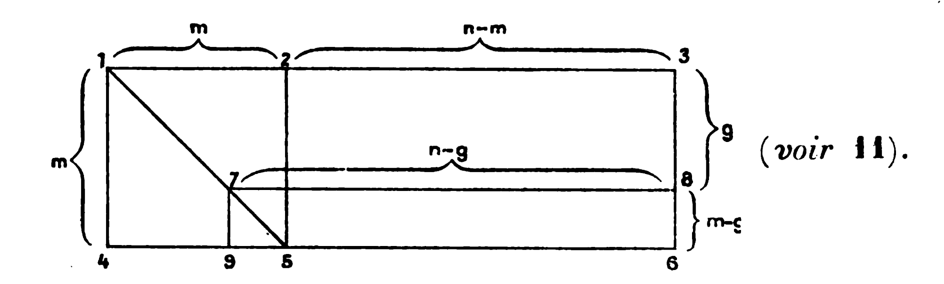
$$g + 2(m-g) = 2m - g.$$

29°. Choisissons, dans la suite $12\ldots n$, pour former un p_l, g indices déterminés, par exemple $12\ldots g$, $g \leqq m$. Il faudra choisir les $m-g$ indices restants parmi les $n-g$ entiers $g+1, \ldots, n$. Il y a donc

$$\binom{n-g}{m-g}$$

pareils p_l, que l'on désignera par p_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, \binom{n-g}{m-g}$.

Prenons le Tableau $\mathcal{A}$ qui fournit les p_l sous expression réduite, suivant le schéma ci-dessous :



(*voir* **11**).

1245 est la matrice m-aire Γ, où ne sont différents de zéro et égaux à p_0 que les éléments situés sur la diagonale principale. 2356 est le Tableau C à m lignes et $n-m$ colonnes.

On supprime, dans le Tableau 1346 ou $\mathcal{A}$, les g premières colonnes et les g premières lignes. On a ainsi un Tableau $\mathcal{K}$, ou 7869, à $m-g$ lignes et à $n-g$ colonnes.

Un p_α est le produit par p_0^g d'un mineur $(m-g)$-aire emprunté au Tableau $\mathcal{K}$, lequel est quelconque, si le Tableau $\mathcal{A}$ l'est. Cela résulte de théories longuement exposées au Chapitre II.

On peut énoncer ainsi la proposition que voici :

Théorème. — *Les* $\binom{n-g}{m-g}$ *coordonnées* p_α, *où figurent* g, $g \leqq m$, *indices donnés, sont proportionnelles aux mineurs d'un Tableau* $\mathcal{K}$ *à* $n-g$ *colonnes et* $m-g$ *lignes. Les* p_α *sont donc liés par le système fondamental* $\Omega(n-g, m-g)$.

Les équations (10°) de $\Omega(n-g,\ m-g)$, au nombre de

$$\omega(n-g,\ m-g)=\binom{n-g}{m-g}-1-(m-g)(n-m),$$

figurent donc intégralement parmi les

$$\omega(n,\ m)=\binom{n}{m}-1-m(n-m)$$

équations de $\Omega(n,\ m)$.

30°. Prenons une relation fondamentale quadratique

$$\varphi(p)=0.$$

φ aura la forme, établie au 28° pour les polynomes Ψ, et l'on écrira

$$\varphi=\mathrm{a}\,p_1 p_2+\mathrm{a}' p_3 p_4+\ldots,$$

où les a sont des constantes. Quant aux p_l qui figurent dans φ, on les obtiendra ainsi.

Choisissons un groupement G de g indices et un groupement H de $2(m-g)$ autres indices. Il y a

$$\binom{2m-2g}{m-g}$$

manières de répartir les $2m-2g$ indices de H en deux groupements

$$\mathcal{L}_\sigma \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_\sigma, \qquad \sigma=1,\ 2,\ \ldots,\ \binom{2m-2g}{m-g},$$

de $m-g$ indices chacun.

Désignons, par exemple, par

$$\mathrm{L}_\sigma=(\mathrm{G};\ \mathcal{L}_\sigma) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M}_\sigma=(\mathrm{G};\ \mathcal{M}_\sigma)$$

les p_l où figurent les g indices de G et les $m - g$ indices de $\mathcal{L}_\sigma$ ou $\mathfrak{M}_\sigma$. Il viendra (**28°**)

$$\varphi = \sum_\sigma \mathrm{a}_\sigma \mathrm{L}_\sigma \mathrm{M}_\sigma,$$

et il ne reste plus qu'à calculer les coefficients a_σ.

Les p_l qui figurent dans φ sont constitués avec les $2m - g$ colonnes des indices qui entrent dans G et H. Ces p_l ont en commun les g indices de G.

Le théorème du **29°** nous montre que ces p_l, c'est-à-dire les L_σ et M_σ, sont proportionnels aux mineurs $(m - g)$-aires d'un Tableau à $m - g$ lignes et à $2m - 2g$ colonnes, c'est-à-dire aux coordonnées λ_σ et μ_σ d'une droite de degré $m - g$ dans un espace à $2m - 2g - 1$ dimensions.

La relation quadratique

$$\sum_\sigma \mathrm{a}_\sigma \lambda_\sigma \mu_\sigma = 0$$

figure donc dans le système fondamental $\Omega(2m - 2g, m - g)$; si l'on a construit ce dernier système, on possède les coefficients cherchés a_σ. On voit que l'entier n ne joue aucun rôle dans ce calcul.

La conclusion s'énonce ainsi :

Théorème. — *On connaît le système* $\Omega(n, m)$ *dès qu'on a construit tous les systèmes* $\Omega(2m', m')$, $m' \leqq m$.

Le *type* des équations fondamentales ne dépend ainsi pas de n, mais seulement de m. On possède une sorte de méthode de récurrence qui permet de calculer $\Omega(n, m)$ à l'aide de systèmes analogues où les entiers n et m sont moindres.

31°. Par exemple, faisons, pour n quelconque, $m = 2$ et $g = 0$. On est ramené au système

$$\Omega(4, 2) \quad \text{(considéré déjà au } \mathbf{22°}\text{)},$$

qui comprend une équation unique.

Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre indices choisis dans la suite $1, 2, \ldots, n$. Les rela-

tions fondamentales du système $\Omega(n, 2)$ sont

$$(\alpha\beta)(\gamma\delta)+(\beta\gamma)(\alpha\delta)+(\gamma\alpha)(\beta\delta)=0.$$

32°. On a examiné les relations fondamentales, c'est-à-dire les relations auxquelles satisfont les coordonnées d'une droite, envisagée comme isolée dans l'espace $\mathfrak{E}$ à $n-1$ dimensions. Nous allons maintenant étudier les relations entre les coordonnées, qui caractérisent la situation respective d'une droite et d'un point.

CHAPITRE IV.

Faisceau-point ou gerbe de droites.

33°. Prenons une droite p, de coordonnées p_l, fournie par le Tableau

$$\mathcal{A}=[a_{ij}], \qquad \{i=1, 2, \ldots, m;\ j=1, 2, \ldots, n\}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point x soit situé sur p est que, entre les $m+1$ points $x, a_1, \ldots, a_m$, existe une dépendance linéaire (1°).

La condition est donc (notations du 7°)

$$\mathrm{Rg}\begin{bmatrix} a_{ij} \\ x_j \end{bmatrix}=m.$$

Le Tableau à n colonnes et $m+1$ lignes

$$\begin{bmatrix} a_{ij} \\ x_j \end{bmatrix}$$

donne

$$\binom{n}{m+1}$$

mineurs $(m+1)$-aires $f_r(\overset{1}{x}; \overset{1}{p})$, formes bilinéaires par rapport aux x_j et p_l, avec

$$r=1, 2, \ldots, \binom{n}{m+1}.$$

En raison de leur origine, les f_r sont liées par le système fondamental $\Omega(n, m+1)$.

$\left[\frac{\partial f_r}{\partial x_j}\right]$ est un Tableau à $\binom{n}{m+1}$ lignes et n colonnes, tandis que $\left[\frac{\partial f_r}{\partial p_\iota}\right]$ est un Tableau à $\binom{n}{m+1}$ lignes et à $\binom{n}{m}$ colonnes. Je me propose de calculer les rangs

$$\mathrm{Rg}\left[\frac{\partial f_r}{\partial x_j}\right] \quad \text{et} \quad \mathrm{Rg}\left[\frac{\partial f_r}{\partial p_\iota}\right].$$

Les équations $f_r(x;\, p) = 0$ expriment la situation réunie du point x et de la droite p (point situé sur la droite, droite passant par le point).

34°. Donnons-nous p et supposons $p_0 = (12\ldots m) \neq 0$. D'après des théories bien connues, les $\binom{n}{m+1}$ équations $f_r(x;\, p) = 0$, aux n inconnues x_j, se réduisent à $n - m$ distinctes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} & a_{1\sigma} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} & a_{m\sigma} \\ x_1 & \ldots & x_m & x_\sigma \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sigma = m+1,\, m+2,\, \ldots,\, n.$$

Mais

$$f_r = \sum_j x_j \frac{\partial f_r}{\partial x_j} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Rg}\left[\frac{\partial f_r}{\partial x_j}\right] = n - m,$$

le tout, bien entendu, sous bénéfice des relations fondamentales.

Ainsi : *le fait d'être situé sur une droite donnée équivaut, pour le point x, à $n - m$ relations, toutes linéaires et distinctes, entre les coordonnées x_j.*

35. Donnons-nous maintenant le point x. Dans quelle mesure les relations

$$f_r = \sum_\iota p_\iota \frac{\partial f_r}{\partial p_\iota} = 0,$$

linéaires par rapport aux p_ι et combinées, bien entendu, avec les relations fondamentales, définissent-elles la droite p?

Plaçons-nous d'abord dans un cas particulier, celui où le point x coïncide avec le point X_1,

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0.$$

Le Tableau $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ qui fournit une droite p, issue de X_1, s'écrit, en faisant $x = X_1 = a_1$,

$$\mathcal{A} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\|.$$

Nommons : p_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, \binom{n-1}{m}$, les p_l où l'indice 1 manque, et p_β les p_l où l'indice 1 figure, $\beta = 1, 2, \ldots, \binom{n-1}{m-1}$.

On a d'ailleurs

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}.$$

Si p passe par X_1, on s'assure aisément sur le Tableau $\mathcal{A}$ que :

I. — Tous les p_α sont nuls, ce qui fournit, entre les p_l, $\binom{n-1}{m}$ relations *linéaires* et homogènes distinctes.

II. — Les p_β sont proportionnels aux mineurs $(m-1)$-aires d'un Tableau à $m-1$ lignes et $n-1$ colonnes (théorème du **29°**); les p_β sont arbitraires sous le bénéfice du système fondamental $\Omega(n-1, m-1)$ qui équivaut à

$$\omega(n-1, m-1) = \binom{n-1}{m-1} - 1 - (m-1)(n-m)$$

relations *non linéaires*, puisque (**27°**) il n'existe pas de relation fondamentale linéaire. Ces relations, entre les p_β seules, sont évidemment distinctes des relations linéaires $p_\alpha = 0$.

Les p_l d'une droite issue de X_1 sont donc liées par

$$\omega(n-1, m-1) + \binom{n-1}{m} = \omega(n, m) + n - m$$

relations distinctes, c'est-à-dire $n-m$ relations de plus que les $\omega(n, m)$ relations fondamentales qui lient les p_l d'une droite quelconque.

36°. Réciproquement, prenons un Tableau $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ et supposons nuls tous les p_α, c'est-à-dire tous les p_l où l'indice 1 manque. Alors

$$\mathrm{Rg}\begin{Vmatrix} a_{12} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{Vmatrix} < m.$$

On peut déterminer m paramètres t_i, qui ne soient pas tous nuls, tels que

$$\sum_i t_i a_{ij} = 0 \qquad \text{pour} \qquad j > 1,$$

tandis que $\sum_i t_i a_{i1} \neq 0$, sans quoi $\mathrm{Rg}[a_{ij}] < m$, ce qui est absurde. La droite p passe par le point

$$x_1 \neq 0, \qquad x_2 = \ldots = x_n = 0,$$

c'est-à-dire par le point X_1. Quant aux p_β ils restent arbitraires sous le bénéfice de $\Omega(n-1, m-1)$.

Ainsi : *les* $\binom{n-1}{m}$ *relations linéaires homogènes distinctes* $p_\alpha = 0$ *sont la condition nécessaire et suffisante pour que la droite p passe par le point* X_1.

37°. Pour passer du point X_1 à un point x quelconque, il suffit d'opérer dans l'espace $\mathfrak{E}$ une collinéation ponctuelle convenable, qui se traduit sur les p_l par une collinéation $\binom{n}{m}$-aire correspondante. Cela ne

change pas les résultats précédents; on peut énoncer la propriété que voici :

THÉORÈME. — *Le fait, pour une droite p, de passer par un point x donné, introduit, entre les coordonnées p_l de p, outre les relations fondamentales, encore $n-m$ relations distinctes nouvelles. Les p_l sont alors liées par $\binom{n-1}{m}$ relations linéaires homogènes distinctes et par*

$$\omega(n, m) + n - m - \binom{n-1}{m} = \omega(n-1, m-1)$$

relations non linéaires, distinctes entre elles et des précédentes.

38°. Nous venons de répondre à la question posée au commencement du **35°**. Comme les p_l d'une droite p, issue d'un point donné, satisfont exactement à $\binom{n-1}{m}$ relations linéaires et homogènes, il vient évidemment, avec nos notations du **33°**,

$$\mathrm{Rg}\left[\frac{\partial f_r}{\partial p_l}\right] = \binom{n-1}{m}.$$

39°. Faisons, par exemple, $n=4$, $m=2$ (cas des **22°** et **31°**). Les relations $f_r(x; p) = 0$ (**33°**) sont

$$\begin{aligned} x_1(23) + x_2(31) + x_3(12) &= 0 \\ x_2(34) + x_3(42) + x_4(23) &= 0 \\ x_3(41) + x_4(13) + x_1(34) &= 0 \\ x_4(12) + x_1(24) + x_2(41) &= 0. \end{aligned}$$

Le Tableau quaternaire alterné

$$\left[\frac{\partial f_r}{\partial x_j}\right] = \begin{Vmatrix} 0 & (34) & (42) & (23) \\ (43) & 0 & (14) & (31) \\ (24) & (41) & 0 & (12) \\ (32) & (13) & (21) & 0 \end{Vmatrix}$$

et a bien, tous ses mineurs ternaires nuls, sous le bénéfice de la relation fondamentale

$$(12)(34)+(23)(14)+(31)(24)=0.$$

En rangeant les six coordonnées p_l dans l'ordre

$$(12)\quad(34),\qquad(23)\quad(14),\qquad(31)\quad(24),$$

il vient pour le Tableau

$$\left[\frac{\partial f_r}{\partial p_l}\right]=\left\|\begin{matrix} x_3 & 0 & x_1 & 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_2 & x_4 & 0 & 0 & -x_3 \\ 0 & x_1 & 0 & -x_3 & -x_4 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & -x_2 & 0 & x_1 \end{matrix}\right\|.$$

Le rang est bien $\binom{n-1}{m}=\binom{3}{2}=3$, car les six équations aux quatre inconnues $\lambda_r (r=1, 2, 3, 4)$, savoir

$$0=\sum_r \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial p_l}$$

donnent simplement

$$\frac{\lambda_1}{x_4}=\frac{\lambda_2}{-x_1}=\frac{\lambda_3}{x_2}=\frac{\lambda_4}{-x_3}.$$

Les trois équations linéaires distinctes entre les p_l suffisent pour faire passer la droite par le point x. En effet, les relations non linéaires sont au nombre de

$$\omega(n-1, m-1)=\omega(3, 2)=0.$$

La relation fondamentale est une conséquence des trois relations linéaires. En effet, on exprime, au moyen des relations $f_r=0$, trois des p_l, rationnellement en x_j et linéairement par rapport aux trois autres p_l. La relation fondamentale est satisfaite alors identiquement.

40°. Je nommerai, pour abréger le langage, *faisceau-point* $\bar{x}$, la figure constituée par toutes les droites qui passent par un point x. Un faisceau-point $\bar{x}$ a pour équations

$$f_r(x;p) = 0, \qquad r = 1, 2, \ldots, \binom{n}{m+1}$$

où les x_j sont envisagés comme des paramètres.

41°. Les expressions $f_r(x;p)$ permettent de résoudre beaucoup de problèmes relatifs à des intersections de droites.

Soient, par exemple, des droites $p, p', p'', \ldots$ ayant, dans un même espace à $n-1$ dimensions, les degrés $m, m', m'', \ldots$, et les coordonnées $p_l, p'_{l'}, p'_{r}, \ldots$

$$l = 1, 2, \ldots, \binom{n}{m}; \qquad l' = 1, 2, \ldots, \binom{n}{m'}; \qquad \ldots.$$

Si un point x est sur chacune de ces droites, on a

$$f_r(x;p) = 0, \qquad f'_{r'}(x;p') = 0, \qquad f''_{r''} = 0, \qquad \ldots.$$
$$r = 1, 2, \ldots, \binom{n}{m+1}; \qquad r' = 1, 2, \ldots, \binom{n}{m'+1}; \qquad \ldots,$$

Nommons M le rang du Tableau

$$\mathfrak{M} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_r}{\partial x_j} \\ \dfrac{\partial f'_{r'}}{\partial x_j} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{à } n \text{ colonnes et à } \binom{n}{m+1} + \binom{n}{m'+1} + (\ldots) + \ldots \text{ lignes.}$$

Les points x, communs à toutes les droites, formeront évidemment une droite de degré $n - \mathrm{M}$.

42°. Le faisceau-point est aussi ce que, dans l'espace réglé ordinaire à trois dimensions, on a nommé *gerbe* de droites (Königs, *la Géométrie réglée*, p. 111).

CHAPITRE V.

Dualité.

43°. Dans l'espace $\mathfrak{E}$, à $n-1$ dimensions, lieu du point x, prenons aussi un *plan* u, par ses n coordonnées homogènes

$$u_j, \quad \{j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Si x est sur u, on a $\sum ux = 0$.

Si une droite p, de degré m, a m de ses points, linéairement distincts, situés sur un plan u, la droite est contenue tout entière dans u.

Supposons p fournie par le Tableau $a = \mathcal{A} = [a_{ij}]$, $\{i = 1, 2, \ldots, m\}$. Pour que u contienne p, il faut et il suffit que

$$(0) \qquad \sum_j u_j a_{ij} = 0.$$

Comme $\mathcal{A}$ a le rang m, il vient comme solution des relations (0),

$$u_j = \sum_k t_k \alpha_{kj}, \qquad t_k = \text{paramètre arbitr.}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-m,$$

le Tableau $\alpha = [\alpha_{kj}]$ à n colonnes et $n-m$ lignes ayant le rang $n-m$.

Les deux Tableaux

$$a = [a_{ij}], \qquad \alpha = [\alpha_{kj}]$$

sont *adjoints;* chacun est adjoint de l'autre.

44°. Les relations

$$(1) \qquad \sum x_j \alpha_{kj} = 0$$

donnent réciproquement

$$x_j = \sum_i \tau_i a_{ij}, \qquad \tau_i = \text{param. arbitr.}$$

puisque

$$(2) \qquad \sum a_{ij} \alpha_{kj} = 0,$$

pour toute combinaison des indices i et k.

Les $n - m$ plans α_k définissent sans ambiguïté les m points a_i, c'est-à-dire la droite p. Cette droite peut être considérée comme définie à volonté :

Soit par le Tableau *ponctuel* $a = [a_{ij}]$,
Soit par le Tableau *planaire* $\alpha = [\alpha_{kj}]$,

ou les $n - m$ plans α_k, linéairement distincts.

43°. Le Tableau α donne $\binom{n}{n-m} = \binom{n}{m}$ mineurs $(n-m)$-aires, qu'on désignera par ϖ_l, $\left\{ l = 1, 2, \ldots, \binom{n}{m} \right\}$.

Formons le déterminant H de la matrice n-aire

$$\begin{bmatrix} a_{ij} \\ \alpha_{kj} \end{bmatrix},$$

il sera la somme de produits d'un p_l par un ϖ_l. On écrira

$$\mathrm{H} = \sum_l p_l \varpi_l \qquad \text{ou} \qquad \varpi_l = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_l}.$$

Cette formule fixe le numérotage et le signe des ϖ_l.

Tout ce que nous avons dit, aux Chapitres précédents, sur les p_l, s'applique aux ϖ_l. Ainsi les ϖ_l sont liés par le sytème fondamental

$$\Omega(n, n-m)$$

à $\omega(n, n-m)$ équations distinctes, etc.

D'ailleurs

$$\omega(n, n-m) = \binom{n}{n-m} - 1 - (n-m)m = \omega(n, m).$$

46°. Cherchons maintenant quelles relations existent entre

les mineurs m-aires p_l, fournis par un Tableau $a = [a_{ij}]$ à m lignes et n colonnes,

les mineurs $(n-m)$-aires ϖ_l, fournis par le Tableau adjoint

$$\alpha = [\alpha_{kj}],$$

à n colonnes et $n-m$ lignes.

47°. Introduisons à cet effet deux Tableaux arbitraires, savoir

un Tableau b, à m lignes et n colonnes, $b = [b_{gj}]$, avec les mineurs m-aires q_l;

un Tableau γ, à $n-m$ lignes et n colonnes, $\gamma = [\gamma_{hj}]$, avec les mineurs $(n-m)$-aires ρ_l.

$$j = 1, 2, \ldots, n; \qquad i, g = 1, 2, \ldots, m; \qquad k, h = 1, 2, \ldots, n-m.$$

Formons la matrice m-aire $ba' = \left[\sum_j b_{gj} a_{ij}\right]$, dont le déterminant

$$|ba'| = |(ba')'| = |ab'| = \sum_l q_l p_l = \sum qp.$$

Cela résulte d'un théorème bien connu (Pascal, p. 30).

Formons aussi la matrice n-aire

$$T = n\left\{\overbrace{\boxed{\;a'\;}}^{m}\overbrace{\boxed{\;\gamma'\;}}^{n-m}\right. ; \qquad |T| \neq 0.$$

Le déterminant $|T|$ peut se développer comme fonction bilinéaire par rapport aux p_l, mineurs m-aires du Tableau a', et aux ρ_l, mineurs $(n-m)$-aires du Tableau γ'.

$$|T| = \sum \rho p.$$

Introduisons enfin la matrice n-aire

$$\mathfrak{P} = \overbrace{\begin{array}{|c|}\hline b \\ \hline \alpha \\ \hline\end{array}}^{n} \begin{array}{l}\}\, m \\ \}\, n-m\end{array}$$

Évidemment $|\mathfrak{P}| = \sum q\varpi$.

48°. Tout cela posé, calculons le produit $\mathfrak{P}T$ des deux matrices n-aires.

$$\mathfrak{P}T = \begin{array}{|c|c|}\multicolumn{1}{c}{m} & \multicolumn{1}{c}{n-m} \\ \hline ba' & b\gamma' \\ \hline \alpha a' & \alpha\gamma' \\ \hline\end{array} \begin{array}{l}\}\, m \\ \}\, n-m\end{array}$$

[d'après la formule (o) des Définitions et Notations, page 121].

Mais $\alpha a' = \left[\sum \alpha_{kj} a_{ij}\right] = 0$ (**44°**) et

$$|\mathfrak{P}\mathrm{T}| = |ba'||\alpha\gamma'|.$$

$\alpha\gamma'$ est une matrice $(n - m)$-aire

$$\alpha\gamma' = \left[\sum_j \alpha_{kj}\gamma_{hj}\right]$$

et (théorème précité au bas de la page 150)

$$|\alpha\gamma'| = \sum \rho\varpi.$$

Finalement, eu égard à **47°**,

$$|\mathfrak{P}\mathrm{T}| = |\mathfrak{P}|.|\mathrm{T}| = \sum q\varpi \times \sum \rho p = |ba'||\alpha\gamma'| = \sum qp \times \sum \rho\varpi,$$

c'est-à-dire

$$\text{(o)} \qquad \frac{\sum q\varpi}{\sum qp} = \frac{\sum \rho\varpi}{\sum \rho p}.$$

49°. Les Tableaux b et γ sont arbitraires. Laissant γ fixe, j'attribue successivement au Tableau b des expressions différentes au nombre de

$$\binom{n}{m}.$$

Soit l un indice correspondant au groupement $j_1 j_2 \ldots j_m$ de m indices pris dans la suite $1, 2, \ldots, n$.

Prenons pour b un Tableau où toutes les colonnes, sauf $j_1 \ldots j_m$, sont constituées par des zéros. Tous les mineurs q seront nuls, sauf q_l.

La formule (o) prend ainsi successivement les $\binom{n}{m}$ formes

$$\left\{l = 1, 2, \ldots, \binom{n}{m}\right\}, \qquad \frac{\varpi_l}{p_l} = \frac{\sum \rho\varpi}{\sum \rho p}.$$

Donc *les ϖ_l sont proportionnels aux p_l.*

50°. La droite p de degré m sera déterminée à volonté :

soit par ses *coordonnées-points* p_i;

soit par ses *coordonnées-plans* ϖ_i.

La droite p, de degré m, sera définie aussi comme l'intersection des $n-m$ plans α_k. On dira que $n-m$ est la *classe* de la droite.

Un point (plan) est une droite de degré *un* (de degré $n-1$), et de classe $n-1$ (de classe *un*).

Les équations fondamentales, auxquelles satisfont les coordonnées-plans ϖ_i, s'obtiennent sans difficulté. Les théories des trois premiers chapitres s'appliquent immédiatement aux ϖ_i.

51°. Voyons ce que deviennent les théories du Chapitre IV.

Pour exprimer que le plan u passe par la droite p, il faut et il suffit d'écrire que

$$\text{Rg}\begin{bmatrix}\alpha_{kj}\\ u_j\end{bmatrix}=n-m,$$

ce qui donne $\binom{n}{n-m+1}$ relations

$$\mathcal{F}_\rho\left(\overset{1}{u};\overset{1}{\varpi}\right)=\text{F}_\rho(u;p)=0,$$
$$\rho=1,2,\ldots,\binom{n}{n-m+1},$$

les $\mathcal{F}$ et les F étant des formes bilinéaires, analogues aux formes f_r du Chapitre IV.

Comme dans ce Chapitre, on s'assurera des propriétés suivantes.

Le fait pour un plan u de passer par une droite équivaut, entre les u_j, à m conditions linéaires distinctes.

Le fait pour une droite p d'être contenue dans un plan u introduit entre les coordonnées de la droite, outre les relations fondamentales,

encore m relations distinctes. Les coordonnées sont liées par

$$\binom{n-1}{m-1}$$

équations linéaires homogènes distinctes et encore par $\omega(n-1, m)$ relations non linéaires.

Voici comment on raisonnera (*voir* **35°** à **37°**).

Si p est contenue dans le plan $x_1 = 0$, sont nulles les $\binom{n-1}{m-1}$ coordonnées-points p_i où l'indice 1 figure.

Les

$$\binom{n}{m} - \binom{n-1}{m-1} = \binom{n-1}{m}$$

cordonnées, où l'indice 1 manque, sont liées par les $\omega(n-1, m)$ relations d'un système fondamental $\Omega(n-1, m)$.

Il y a donc des relations non linéaires au nombre de

$$\omega(n-1, m) = \binom{n-1}{m} - 1 - m(n-m-1)$$

et $\binom{n-1}{m-1}$ relations linéaires, soit en tout

$$\binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} - 1 - m(n-m) + m = \omega(n, m) + m$$

relations.

32°. Les équations (**31°**) $F_\rho(u; p) = 0$ définissent un *faisceau-plan*, $\overline{u}$ correspondant dualistique du faisceau-point (**40°**), c'est-à-dire la figure constituée par les droites situées dans le plan u.

DEUXIÈME PARTIE.

TRANSFORMATIONS LINÉAIRES DES COORDONNÉES PLUCKÉRIENNES.

CHAPITRE VI.

Nature du problème.

53°. Dans l'espace $\mathfrak{E}$ à $n-1$ dimensions, effectuons une collinéation ponctuelle s, qui se traduit sur les coordonnées x_j par la substitution linéaire, $\{j, k = 1, 2, \ldots, n\}$,

$$s = \left| x_k \quad \sum_j s_{kj} x_j \right| = |x_k \quad s[x_k]| = |x \quad s[x]| = |x \quad y|,$$

où $s = [s_{kj}]$ est une matrice n-aire, avec $|s| \neq 0$. Le point y, ayant pour coordonnées les $s[x_k] = \sum_j s_{kj} x_j$, est dit *image* de x par s.

L'opération géométrique s consiste à remplacer chaque point x par son image y.

54°. Pareillement, la collinéation géométrique s se traduit, sur les plans u de l'espace, par la collinéation

$$|u \quad s'^{-1}[u]|.$$

55°. Sur les coordonnées p_t de la droite p, de degré m, la collinéation géométrique s se traduit par la collinéation $\binom{n}{m}$-aire (**6°**)

$$\mathrm{S} = \left| p_t \quad \sum_t \mathrm{S}_{ut} p_t \right| = |p_t \quad \mathrm{S}[p_t]| = |p \quad \mathrm{S}[p]| = |p \quad q|,$$

où $S'_{ll'}$ est un mineur m-aire de la matrice n-aire s. On a

$$S_{ll'} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix}$$

et est formé par les lignes d'indices $k_1, \dots, k_m$ et les colonnes d'indices $j_1 \dots j_m$. L'indice l correspond à la combinaison $k_1 \dots k_m$; l' correspond à la combinaison $j_1 \dots j_m$.

La droite $q = S[p]$ dont les coordonnées q_l sont

$$q_l = S[p_l] = \sum_{l'} S_{ll'} p_{l'}$$

est dite *image* de p par S.

L'opération géométrique $\mathcal{S}$ est celle qui remplace la droite quelconque p par son image q.

On a vu que la $\binom{n}{m}$-aire S a, pour déterminant, celui de la n-aire s, élevé à la puissance (6°) $\binom{n-1}{m-1}$, et, par conséquent, différent de zéro.

36°. Les explications ci-dessus, relatives aux matrices s, S et à l'opération géométrique $\mathcal{S}$, donnent lieu à une objection grave, au moins en apparence, et qu'il convient de lever.

Deux n-aires différentes s et t et les $\binom{n}{m}$-aires correspondantes S et T conduiront à *la même opération* $\mathcal{S}$ si l'on a, pour toutes les combinaisons ll'' d'indices,

$$\frac{S[p_l]}{T[p_l]} = \frac{\sum_{l'} S_{ll'} p_{l'}}{\sum_{l'} T_{ll'} p_{l'}} = \frac{S[p_{l''}]}{T[p_{l''}]} = \frac{\sum_{l'} S_{l''l'} p_{l'}}{\sum_{l'} T_{l''l'} p_{l'}}$$

ou

$$\varphi_{ll''} = \left(\sum_{l'} S_{ll'} p_{l'}\right)\left(\sum_{l'} T_{l''l'} p_{l'}\right) - \left(\sum_{l'} S_{l''l'} p_{l'}\right)\left(\sum_{l'} T_{ll'} p_{l'}\right) = 0.$$

Or $\varphi_{ii'}(p)$ est une forme quadratique des p_i, laquelle peut éventuellement s'évanouir sous le bénéfice des relations fondamentales (Chapitre II).

Nous allons montrer que cette éventualité est absurde : l'opération S définit la matrice S sans ambiguïté.

La présente difficulté ne se présentait pas pour les coordonnées x_j, qui sont variables indépendantes, tandis que les coordonnées p_i sont liées par les relations fondamentales.

La démonstration exige quelques explications préparatoires et quelques développements.

57°. Désignons par K l'expression

$$K = \sum_i K_i p_i,$$

où aucune des constantes K_i n'est zéro. Dans la suite $1, 2, \ldots, n$, prenons à volonté h indices $j_1 j_2 \ldots j_h$. Nommons

K^1 l'ensemble des termes de K où l'indice j_1 figure,
K^0 l'ensemble des termes de K où l'indice j_1 manque.

De même,

K^{11} / K^{00} sera l'ensemble des termes de K où les indices j_1 et j_2, à la fois, figurent / manquent.

Enfin,

$K^{\overbrace{11\ldots1}^{h}}$ sera l'ensemble des termes de K, où les h indices $j_1, \ldots, j_h$ figurent à la fois;

$K^{\overbrace{00\ldots0}^{h}}$ sera l'ensemble des termes de K où les h indices $j_1, \ldots, j_h$ manquent à la fois.

$K^{\overbrace{11\ldots1}^{h}}$ contient $\binom{n-h}{m-h}$ termes, tandis que $K^{\overbrace{0\ldots0}^{h}}$ contient $\binom{n-h}{m}$ termes.

Pour que $K^{\overbrace{11\ldots1}^{h}}$ puisse exister, il faut évidemment que $m-h \geqq 0$, $h \leqq m$.

Pour que $K^{\overbrace{0\ldots0}^{h}}$ puisse exister, il faut de même que $n-h \geqq m$ ou $h \leqq n-m$.

Faisons successivement $h=1, 2, \ldots$. Jusqu'où pourra-t-on continuer?

h ne peut dépasser ni m, ni $n-m$. Supposons d'abord $m < n-m$; on pourra faire $h=m$. Alors

$$K^{\overbrace{11\ldots1}^{m}}$$

contiendra un seul et unique terme, celui en $(j_1 \ldots j_m)$.

Supposons ensuite $m > n-m$; on pourra faire $h=n-m$. Si la suite $1, 2, \ldots, n$ est constituée par les deux groupements

$$j_1 j_2 \ldots j_{n-m} \quad \text{et} \quad j_1 j'_2 \ldots j'_m,$$

alors

$$K^{\overbrace{00\ldots0}^{n-m}}$$

est formé par le seul et unique terme, celui en

$$(j'_1 j'_2 \ldots j'_m).$$

Enfin, si $n=2m$, $m=n-m$, on pourra aller jusqu'à $h=m$. Alors

$K^{\overbrace{1\ldots1}^{m}}$ contiendra un terme unique en $(j_1 \ldots j_m)$,

$K^{\overbrace{0\ldots0}^{m}}$ contiendra un terme unique en $(j'_1 \ldots j_m)$.

38°. Soit un nombre fini M d'expressions, $\{\mu = 1, 2, \ldots, M\}$

$$D_\mu = \sum_i d_{\mu i} p_i \qquad d_{\mu i} = \text{const}.$$

On peut effectuer sur les coordonnées x_j une collinéation n-aire qui se traduira sur les p_i par une collinéation $\binom{n}{m}$-aire S (35°). Vis-à-vis de S, le système fondamental est un invariant (7°).

En effet, S remplace la droite p, de coordonnées p_i, par la droite q de coordonnées $q_i = \sum_i S_{ii'} p_{i'}$.

Les p_i satisfont au système fondamental $\Omega(n, m)$

$$\varphi_\sigma(p) = 0, \qquad \{\sigma = 1, 2, \ldots, \omega(n, m)\}.$$

Il en est de même des q_i et il vient

$$\varphi_\sigma(q) = \psi_\sigma(p) = 0.$$

Chacun des deux systèmes

$$\varphi_\sigma = 0 \qquad \text{et} \qquad \psi_\sigma = 0$$

est une conséquence de l'autre. C. Q. F. D.

Or on peut évidemment disposer des coefficients de la collinéation n-aire de façon que chacune des constantes $d_{\mu i}$ soit différente de zéro.

Bref, il est licite de supposer, sans restreindre la généralité, que chacune des expressions D_μ contient effectivement toutes les coordonnées p_i. On pourra opérer sur D_μ comme sur K, au 37°.

39°. La notation $A(p) = B(p)$ indiquera que les deux fractions rationnelles A et B en p_i sont égales *sous le bénéfice des relations fondamentales*. La notation $A(p) \equiv B(p)$ indiquera une *identité :* les deux membres sont égaux *quand les p_i sont envisagées comme variables indépendantes*.

L'égalité $A \equiv B$ entraîne comme conséquence $A = B$, mais la réciproque n'est pas vraie en général.

60°. Prenons $2P$ expressions

$$\begin{matrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_r, & \ldots, & a_s, & \ldots, & a_P, \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_r, & \ldots, & b_s, & \ldots, & b_P, \end{matrix}$$

où

$$a_s = \sum_t a_{st} p_t, \qquad b_s = \sum_t b_{st} p_t.$$

En vertu du 58°, on pourra supposer différente de zéro chacune des constantes a_{st} et b_{st}.

Admettons que l'on ait

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \ldots = \frac{b_r}{a_r} = \ldots = \frac{b_s}{a_s} = \ldots = \frac{b_P}{a_P}$$

ou

$$(o) \qquad b_s = \rho a_s,$$

où la valeur commune des P rapports est désignée par ρ.

Je dis que *la relation* $b_s = \rho a_s$ *entraîne l'identité* (59°)

$$b_s \equiv \rho a_s, \qquad \{s = 1, 2, \ldots, P\}.$$

Alors ρ est une constante, avec

$$b_{st} = \rho a_{st}.$$

Le théorème est évident pour $n = 3$, car il n'y a pas alors de relations fondamentales et la distinction, établie au 59°, ne subsiste plus.

Il suffira de montrer que, si l'énoncé est vrai pour $n - 1$ (dans l'espace à $n - 2$ dimensions), il est vrai aussi pour n (dans l'espace à $n - 1$ dimensions).

J'admettrai que l'énoncé est établi pour $n - 1$.

61°. Faisant usage des notations K^0, K', K'', K^{00}, ... du 57°, nous énoncerons une proposition préliminaire.

LEMME. — *Si l'on a $b_s = \rho a_s$, avec $b_s \not\equiv \rho a_s$, on a aussi $b'_s = \rho_1 a''_s$, avec $b'_s \not\equiv \rho_1 a^0_s$.*

Passons à la démonstration du lemme.

62°. Si $b_s = \rho a_s$, on a, pour $r \neq s$,

$$\rho = \frac{b_r}{a_r} = \frac{b_s}{a_s}. \tag{o}$$

Dans le Tableau $\mathcal{A}$ qui fournit les p_l, d'après les théories des Chapitres précédents, multiplions par une constante arbitraire λ les éléments de la $j_1^{\text{ième}}$ colonne (*voir* Chap. III). Les p_l où j_1 manque ne subissent aucune modification, tandis que les p_l, où j_1 figure, sont multipliées par λ. Notamment a_s, par exemple, devient

$$\lambda a'_s + a^0_s \quad (57°).$$

La formule (o) devient

$$\rho(\lambda) = \frac{\lambda b'_r + b^0_r}{\lambda a'_r + a^0_r} = \frac{\lambda b'_s + b^0_s}{\lambda a'_s + a^0_s}, \tag{1}$$

c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda^2 \begin{vmatrix} b'_r & b'_s \\ a'_r & a'_s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b''_r & b^0_s \\ a^0_r & a^0_s \end{vmatrix} \\ + \lambda \left\{ \begin{vmatrix} b'_r & b^0_s \\ a'_r & a''_s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b^0_r & b'_s \\ a^0_r & a'_s \end{vmatrix} \right\} = \Phi(\lambda) = 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

Le polynome quadratique Φ en λ est nul pour toute valeur de λ. On a

donc

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} b'_r & b'_s \\ a'_r & a'_s \end{vmatrix} = 0;$$

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} b^0_r & b^0_s \\ a^0_r & a^0_s \end{vmatrix} = 0;$$

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} b'_r & b^0_s \\ a'_r & a^0_s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b^0_r & b'_s \\ a^0_r & a'_s \end{vmatrix} = 0.$$

Des formules (3) et (4) on tire respectivement, laissant l'indice r fixe et faisant varier l'indice s,

$$(6) \qquad \theta b'_r = a'_r;$$

$$(7) \qquad b^0_r = \tau a^0_r.$$

Sous le bénéfice de (6) et (7), (5) devient

$$(8) \qquad (1 - \theta\tau) \begin{vmatrix} b'_r & b'_s \\ a^0_r & a^0_s \end{vmatrix} = 0.$$

63°. Dans la formule (6) entrent seulement celles des coordonnées p_t où l'indice j_1 figure. Ces p_t-là sont (théorème du **29°**) proportionnelles aux mineurs $(m-1)$-aires d'un Tableau à $m-1$ lignes et $n-1$ colonnes. On est donc dans l'espace à $n-2$ dimensions et (**60°**, *in fine*) $\theta b'_r \equiv a'_r$, $\theta = \text{const.}$

Dans la formule (7) entrent seulement celles des coordonnées p_t où l'indice j_1 manque. Ces p_t-là sont les mineurs m-aires d'un Tableau à m lignes et à $n-1$ colonnes. On est encore dans l'espace à $n-2$ dimensions. Encore $b^0_r \equiv \tau a^0_r$, $\tau = \text{const.}$

Si par hasard m était égal à $n-1$, on aurait $\omega(n, n-1) = 0$. Il n'y aurait pas de relations fondamentales et encore $b^0_r \equiv \tau a^0_r$, $\tau = \text{const.}$

Réciproquement :

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \text{si} & \theta = \text{const.}, & a'_r \equiv \theta b'_r, \\ \text{si} & \tau = \text{const.}, & b^0_r \equiv \tau a^0_r, \end{array} \right\} \text{ puisque (27°) les } p_t \text{ sont linéairement indépendantes.}$$

64°. Supposons, dans la formule (8), les deux constantes θ et τ telles que $1-\tau\theta=0$. Alors, en vertu de (6) et (7),

$$\frac{b_s}{a_s}=\frac{b_s^1+b_s^0}{a_s^1+a_s^0}=\frac{\tau a_s^1+\tau a_s^0}{a_s^1+a_s^0}=\tau=\text{const.},$$

puisque $\theta=\tau^{-1}$. On a alors

$$0=b_s-\tau a_s=\sum_t p_t\{b_{st}-\tau a_{st}\}.$$

Les p_t sont linéairement indépendantes.

$$b_{st}=\tau a_{st}$$

et

$$b_s\equiv\tau a_s.$$

Dans cette éventualité, le théorème du **60°**, dont nous poursuivons la démonstration, serait établi et il serait inutile d'aller plus loin.

65°. Faisons donc, dans la formule (8), $1-\tau\theta\neq 0$ et

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} b_r^1 & b_s^1 \\ a_r^0 & a_s^0 \end{vmatrix}=0,\qquad \text{c'est-à-dire}\qquad b_r^1=\rho_1 a_r^0.$$

Sous le bénéfice des formules (6), (7), (10) on a

$$b_s^1=\rho_1 a_s^0,\qquad b_s^0=\tau a_s^0,\qquad a_s^1=\theta b_s^1=\theta\rho_1 a_s^0,$$

$$\rho=b_s:a_s=\frac{b_s^1+b_s^0}{a_s^1+a_s^0}=\frac{\rho_1+\tau}{\theta\rho_1+1}.$$

Comme le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \tau \\ \theta & 1 \end{vmatrix}=1-\theta\tau\neq 0,$$

$\rho_1=\text{const.}$ est la condition nécessaire et suffisante pour que $\rho=\text{const.}$

D'ailleurs, la condition nécessaire et suffisante pour que

$$b_s : a_s \equiv \rho \qquad \text{ou} \qquad b'_s : a^0_s \equiv \rho_1$$

respectivement, est, respectivement,

$$\rho = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad \rho_1 = \text{const.}$$

66°. Nous sommes maintenant à même de démontrer le lemme du **61°**.

Si $b_s : a_s = \rho$ avec $b_s : a_s \not\equiv \rho$, on a {formule (10) du **63°**} $b'_s = \rho_1 a^0_s$.

Je dis que $b'_s \not\equiv \rho_1 a^0_s$. En effet, dans le cas contraire, on aurait (**63°**) $\rho_1 = \text{const.}$, $\rho = \text{const.}$, $b_s : a_s \equiv \rho$, ce qui est contre l'hypothèse.

Le lemme est ainsi établi. Passons au théorème du **60°**.

67°. Il s'agit de montrer que l'hypothèse $b_s : a_s = \rho$ avec $b_s : a_s \not\equiv \rho$ est absurde.

On n'a qu'à recourir à l'application réitérée du lemme et du **59°**.

Si $b_s = \rho a_s$ avec $b_s \not\equiv \rho a_s$, on a successivement, en vertu du lemme,

$$\begin{array}{lcl}
b'_s = \rho_1 a^0_s, & \text{avec} & b'_s \not\equiv \rho_1 a^0_s, \\
b''_s = \rho_2 a^{00}_s, & \text{avec} & b''_s \not\equiv \rho_2 a^{00}_s, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
b_s^{\overbrace{11\ldots\ldots1}^{h}} = \rho_h a_s^{\overbrace{0\ldots\ldots0}^{h}}, & \text{avec} & b_s^{\overbrace{1\ldots1}^{h}} \not\equiv \rho_h a_s^{\overbrace{0\ldots0}^{h}}.
\end{array}$$

Or (**59°**, *in fine*), pour h assez grand, ou bien

$$b_s^{\overbrace{1\ldots1}^{h}} = G_s p_0, \qquad G_s = \text{const.},$$

ou bien

$$a_s^{\overbrace{0\ldots0}^{h}} = H_s p_0, \qquad H_s = \text{const.},$$

la coordonnée p_0 étant la même pour $s = 1, 2, \ldots, P$.

On peut faire dans ρ_h entrer p_0 ou p_0^{-1} et l'on aura ou bien

$$\overbrace{b_s^{1\dots 1}}^{h} : H_s = \rho_h, \qquad \text{avec} \qquad \overbrace{b_s^{1\dots 1}}^{h} : H_s \not\equiv \rho_{h'},$$

ou bien

$$\overbrace{a_s^{0\dots 0}}^{h} : G_s = \rho_h^{-1}, \qquad \text{avec} \qquad \overbrace{a_s^{0\dots 0}}^{h} ; G_s \not\equiv \rho_h^{-1}.$$

Comme les H et G sont des constantes, tandis que les p_l sont des variables linéairement indépendantes (**27°**), l'une et l'autre éventualité est absurde, ainsi que l'hypothèse primitive $b_s : a_s = \rho$ avec $b_s : a_s \not\equiv \rho$.

Le théorème est ainsi complètement démontré.

68°. On est maintenant à même de lever la difficulté signalée au **56°**.

Prenons deux matrices S et T, qui admettent toutes deux pour invariant le système fondamental $\Omega(n, m)$, mais qui conduisent à une même transformation géométrique $\mathcal{S}$.

On devra avoir, si $S = [S_{ll'}]$ et $T = [T_{ll'}]$, $\left\{l, l', l'' = 1, 2, \dots, \binom{n}{m}\right\}$,

$$\rho = \frac{T[p_l]}{S[p_l]} = \frac{\sum\limits_{l'} T_{ll'} p_{l'}}{\sum\limits_{l'} S_{ll'} p_{l'}}.$$

On retombe sur le cas du **60°** avec

$$P = \binom{n}{m}, \qquad b_s = T[p_s], \qquad a_s = S[p_s].$$

Le théorème du **60°** s'applique, et l'on a non seulement

$$\rho = T[p_l] : S[p_l],$$

mais aussi

$$\rho \equiv T[p_l] : S[p_l] \equiv \text{const.},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{l'} p_{l'} \{ T_{ll'} - \rho S_{ll'} \} = 0.$$

Les p_l sont linéairement indépendantes, $T_{ll'} = \rho S_{ll'}$, $TS^{-1} = \rho E$, E étant la matrice unité $\binom{n}{m}$-aire.

Si la transformation géométrique $\mathcal{S}$ du 36° est donnée par la matrice $\binom{n}{m}$-aire S, cette matrice est définie sans ambiguïté, à une constante-multiplicateur ρ près.

Autrement dit : *l'étude des transformations $\mathcal{S}$ et des matrices* S *se fait comme si les p_l étaient variables indépendantes*, sans qu'on ait besoin de se préoccuper des relations fondamentales.

69°. C'est cette étude qui est la matière des Chapitres suivants de la présente deuxième Partie.

CHAPITRE VII.

Matrice $\binom{n}{m}$-aire $A = \Delta_m a$, ayant pour éléments les mineurs m-aires d'une matrice m-aire a.

70°. Je désignerai par des minuscules $a, b, c, \ldots$

$$a = [a_{kj}], \qquad b = [b_{kj}], \qquad \ldots, \qquad \{k, j = 1, 2, \ldots, n\}$$

des matrices n-aires, et par des majuscules,

$$A = [A_{ll'}], \qquad B = [B_{ll'}], \qquad \ldots, \qquad \left\{l, l' = 1, 2, \ldots, \binom{n}{m}\right\},$$

les $\binom{n}{m}$-aires correspondantes. Les $A_{ll'}$ sont les mineurs m-aires de la matrice a, etc.

Les majuscules $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ... désigneront les opérations géométriques, effectuées sur les droites p de l'espace, correspondantes à la collinéation

$$\binom{n}{m}\text{-aire} \quad A, B, \ldots.$$

71°. Je nommerai *normale* toute matrice $\binom{n}{m}$-aire qui admet pour

invariant le système fondamental $\Omega(n, m)$. Les matrices A, B, ... sont évidemment normales (58°).

La question de savoir si toute $\binom{n}{m}$-aire normale provient d'une certaine n-aire par le procédé connu, cette question, dis-je, sera longuement examinée plus bas.

72°. Les substitutions linéaires n-aires $a, b, \ldots$, effectuées sur les x_j, se traduisent sur les p_l, par les substitutions linéaires $\binom{n}{m}$-aires A, B, ...

Soient :

g, un groupe n-aire, formé par les $a, b, c, \ldots$;

G, le groupe $\binom{n}{m}$-aire correspondant, formé par les A, B, C, ...;

$\mathcal{G}$, le groupe des opérations $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, ...

Ces trois groupes sont évidemment isomorphes.

Y a-t-il hémiédrie?

En vertu des explications du Chapitre VI (notamment 68°), on voit qu'à la substitution unité de $\mathcal{G}$ correspondent, dans G, les substitutions ρ E, où E est la $\binom{n}{m}$-aire unité. A E correspond dans $\mathcal{G}$ la substitution unité seule.

A la substitution unité de g correspond, dans G, la substitution unité seule.

A la substitution unité de G correspond dans g un groupe g_0 qu'il convient d'examiner.

73°. Soit $\mathcal{D} = [d_{ij}]$, $\{i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n\}$, un Tableau à m lignes et à n colonnes fournissant les mineurs m-aires p_l. Supposons tous les p_l nuls, sauf $p_0 = (j_1 \ldots j_m)$. Je dis que *toutes les colonnes de* $\mathcal{D}$, *autres que les m colonnes de* p_0, *sont formées exclusivement de zéros.*

Pour le voir, faisons, ce qui est licite, $p_0 = (12\ldots m) \neq 0$, $p_l = 0$,

$l \neq 0$. Notamment

$$(12\ldots\alpha-1,\sigma,\alpha+1,\ldots,m)=0=\sum_i d_{i\sigma}\frac{\partial p_0}{\partial d_{i\alpha}},$$

$$\alpha=1,2,\ldots,m;\qquad \sigma=m+1,m+2,\ldots,n.$$

Comme $\left|\frac{\partial p_0}{\partial d_{i\alpha}}\right| = p_0^{m-1} \neq 0$, il vient $d_{i\sigma}=0$. C. Q. F. D.

La condition est évidemment suffisante.

74°. Prenons une n-aire $a=[a_{kj}]$ et choisissons, dans a, une zone de m lignes $k_1k_2\ldots k_m$, qui forme un Tableau ⅅ à m lignes et n colonnes. Les mineurs $p_{l'}=(j_1j_2\ldots j_m)$ de ⅅ sont les mineurs

$$A_{ll'}=\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_m \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_m \end{pmatrix}.$$

Supposons $A_{ll'}=0$ pour $l \neq l'$, $A_{ll} \neq 0$; autrement dit *le mineur principal de la zone sera seul supposé non nul.*

En vertu du **73°**, tous les éléments de la zone non situés dans les colonnes $k_1, k_2, \ldots, k_m$ sont des zéros.

75°. Prenons une n-aire a telle que la $\binom{n}{m}$-aire A soit canonique; je dis que *a est aussi canonique*, autrement dit $a_{kj}=0$ pour $k \neq j$.

Soit un élément quelconque $a_{k_1j_1}$ de a, avec $k_1 \neq j_1$. Prenons $m-1$ autres lignes $k_2, \ldots, k_m$ et $m-1$ autres colonnes $j_2j_3\ldots j_m$, pour construire un élément

$$A_{ll'}=\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_m \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_m \end{pmatrix}$$

de A. Comme A est canonique, tous les mineurs de la zone $k_1\ldots k_m$ sont nuls sauf le mineur principal

$$A_{ll}=\begin{pmatrix} k_1 & \ldots & k_m \\ k_1 & \ldots & k_m \end{pmatrix}.$$

Tous les éléments de la zone situés en dehors des colonnes $k_1 \ldots k_m$ sont des zéros, notamment $a_{k_1 j_1}$. C. Q. F. D.

Si a est la canonique

$$a = |x_j \quad \rho_j x_j|,$$

A est la canonique

$$A = |p_l \quad P_l p_l|,$$

$$P_l = \rho_{j_1} \ldots \rho_{j_m}, \qquad l = (j_1 j_1 \ldots j_m).$$

Si $A = E$, $P_l = 1$, on a évidemment $\rho_j = \rho$, $\rho^m = 1$, $\rho =$ racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité.

76°. On est maintenant à même de connaître le groupe g_0 (**72°**, *in fine*). Il est formé par les m substitutions e, θe, ..., $\theta^{m-1} e$, où e est la n-aire unité, tandis que θ est une racine primitive $m^{\text{ième}}$ de l'unité.

Soient une $\binom{n}{m}$-aire A et une n-aire a fournissant A. Toutes les n-aires fournissant A sont données par la formule

$$\theta^\mu a, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m.$$

Il suffira de construire une quelconque de ces m n-aires-là.

C'est le problème objet des Chapitres suivants. Nous allons auparavant étudier une certaine substitution n-aire et la $\binom{n}{m}$-aire correspondante.

77°. Considérons la n-aire t

$$t = \begin{vmatrix} x_1 & c_1 x_1 \\ x_j & c_1 x_j - c_j x_1 \end{vmatrix}.$$

Nommons c le point de coordonnées c_j. On a $t[c] = X_1$, X_1 étant le point où toutes les coordonnées sont nulles, sauf x_1.

Considérons la matrice n-aire $re - t$, où e est la n-aire unité. Dans le déterminant $|re - t|$, polynome de degré n en r, nommons Δ_k le p. g. c. d.

des mineurs $k^{\text{ièmes}}$ ou $(n-k)$-aires, polynomes de degré $n-k$ en r. On a

$$\Delta_0 = |rc - t| = (r - c_1)^n = \tau^n.$$

Les n équations du symbole

$$(c_1 e - t)\,[x] = 0$$

se réduisent à l'équation unique $x_1 = 0$ et la matrice $c_1 e - t$ a le rang un. Donc le binome $\tau = r - c_1$ divise

$$\Delta_0, \quad \Delta_1, \quad \ldots, \quad \Delta_{n-2}$$

et les Δ ne sont que des puissances de τ.

Δ_0, décomposé en ses successifs, donne

$$\Delta_0 = \tau^n = \tau^{\alpha_0} \tau^{\alpha_1} \ldots \tau^{\alpha_k} \ldots \tau^{\alpha_{n-1}}$$

avec

$$\alpha_0 \geqq \alpha_1 \geqq \ldots \geqq \alpha_k \geqq \ldots \geqq \alpha_{n-2}$$

(*voir* Définitions et Notations, 6°)

$$n = \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-2}.$$

Posons, puisque les α sont des entiers positifs, $\alpha_k = 1 + \beta_k$, $\beta_k \geqq 0$. Il viendra

$$\beta_0 \geqq \beta_1 \geqq \ldots \geqq \beta_k \geqq \ldots \geqq \beta_{n-2},$$
$$n = n - 1 + \beta_0 + \ldots + \beta_{n-2},$$
$$\beta_0 + \ldots + \beta_{n-2} = 1.$$

Un seul des β, β_0 sera égal à un, les autres seront égaux à zéro. Il y aura un successif double et $n-2$ successifs simples.

$$\Delta_k = \tau^{\alpha_k + \ldots + \alpha_{n-1}} = \tau^{n-k-1}$$

pour $k > 0$, $\Delta_0 = \tau^n$.

Les mineurs $k^{\text{ièmes}}$ de Δ_0, polynomes de degré $n-k$ en r, possèdent un p. g. c. d. $\Delta_k = \tau^{n-k-1}$ de degré $n-k-1$. Après départ de Δ_k ces mineurs deviennent linéaires en r. Ces mineurs sont des formes homogènes de degré $n-k$ en $r, c_1, \ldots, c_n$ et après départ de Δ_k deviennent linéaires et homogènes en $r, c_1, \ldots, c_n$. Faisons $r=0$, $re-t$ se réduit à $-t$ et l'on a le lemme suivant :

LEMME. — *Les* $\binom{n}{m}^2$ *mineurs m-aires de t sont proportionnels à des expressions linéaires et homogènes en* $c_1, \ldots, c_n$.

Soit T la $\binom{n}{m}$-aire qui correspond à t, on aura

$$T = c_1^{m-1}\mathfrak{T}, \qquad \mathfrak{T} = \left[C_{ll'}\binom{1}{c}\right],$$

$C_{ll'}\binom{1}{c}$ étant linéaire et homogène en $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Ces considérations nous sont utiles plus loin au Chapitre IX.

78°. Voici enfin quelques relations mutuelles des n-aires a et des $\binom{n}{m}$-aires A.

Étant donnée une n-aire a, on désignera par $\Delta_\sigma a$, $\{\sigma = 1, 2, \ldots, \text{ou } m\}$, la $\binom{n}{\sigma}$-aire constituée par les mineurs σ-aires de a. On a déjà $A = \Delta_m a$. On posera $\mathfrak{A} = \Delta_{n-m} a$. La correspondance entre les éléments de la $\binom{n}{m}$-aire A et de la $\binom{n}{m}$-aire $\mathfrak{A}$, $\left\{\text{puisque } \binom{m}{n-m} = \binom{n}{m}\right\}$, sera établie par la formule suivante.

Si $\Delta_m a = [A_{lg}]$, $\left\{l, g = 1, 2, \ldots, \binom{n}{m}\right\}$, on écrira

$$\mathfrak{A} = \Delta_{n-m} a = [\mathfrak{A}_{lg}],$$

où $\mathfrak{A}_{lg}$ est le complément algébrique de A_{lg} dans le déterminant $\mathrm{a} = |a|$

de a; autrement dit

$$(\text{o}) \qquad \mathfrak{A}_{lg} = \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial \mathrm{A}_{lg}}.$$

79°. Soit une matrice quelconque P. Nommons P′ sa transposée.

D'après une propriété bien connue des mineurs d'un déterminant (Pascal, p. 85), on peut écrire

$$(\text{I}) \qquad \Delta_\sigma a' = (\Delta_\sigma a)', \qquad \Delta_m a' = (\Delta_m a)'.$$

D'après l'isomorphisme des groupes g et G du 72°, on a

$$\Delta_m a . \Delta_m b = \Delta_m ab.$$

Si $b = a^{-1}$, $ab = e$, $e = n$-aire unité, on a

$$\Delta_m a . \Delta_m a^{-1} = \Delta_m e = \mathrm{E}, \qquad \mathrm{E} = \binom{n}{m}\text{-aire unité}.$$

Finalement

$$(\text{II}) \qquad \Delta_m a^{-1} = (\Delta_m a)^{-1}.$$

Reprenons les matrices $\binom{n}{m}$-aires A et $\mathfrak{A}$ du 78° et formons le produit

$$\mathrm{R} = \mathfrak{A}'\mathrm{A} = \left[\sum_g \mathfrak{A}_{gl}\mathrm{A}_{gl'}\right] = [\mathrm{R}_{ll'}], \qquad \left\{ l, l' g = 1, 2, \ldots, \binom{n}{m} \right\}.$$

Il viendra

$$\mathrm{R}_{ll'} = \text{o} \quad \text{pour} \quad l' \neq l; \qquad \mathrm{R}_{ll} = \mathfrak{a}.$$

Donc

$$\mathfrak{A}'\mathrm{A} = \mathfrak{a}\mathrm{E},$$

$$(\text{III}) \qquad \Delta_{n-m} a' . \Delta_m a = \mathfrak{a}\mathrm{E}.$$

De là, sous le bénéfice de (I) et (II),

$$\Delta_{n-m}a = \text{a}\,\Delta_m a'^{-1},$$

ou encore

$$(1)\qquad (\Delta_m a)^{-1} = \text{a}^{-1}\,\Delta_{n-m}a'.$$

80°. Reprenons la $\binom{n}{m}$-aire T du **77°**. Sous le bénéfice de la formule (1) ci-dessus, *les éléments de la matrice* T^{-1} *sont proportionnels aux mineurs* $(n - m)$*-aires de la matrice* n*-aire* t, c'est-à-dire *proportionnels à des fonctions linéaires et homogènes de* $c_1, \ldots, c_n$.

En résumé, on peut admettre que les éléments des matrices t, T et T^{-1} sont linéaires et homogènes en $c_1, \ldots, c_n$. Ce résultat sera utile plus loin (**85°**).

81°. On est maintenant à même d'aborder le problème principal de cette deuxième Partie.

CHAPITRE VIII.

Transformation des faisceaux-points et des faisceaux-plans.

82°. Prenons une matrice $\binom{n}{m}$-aire $S = [S_{ll'}]$, $\left\{ l, l' = 1, 2, \ldots, \binom{n}{m} \right\}$, normale (**72°**), c'est-à-dire admettant pour invariant le système fondamental $\Omega(n, m)$. Nommons (**70°**) $\mathcal{S}$ l'opération géométrique qui remplace la droite p, de coordonnées p_l, par la droite q, (image $q = \mathcal{S}[p]$ de p par $\mathcal{S}$), ayant pour coordonnées

$$q_l = \sum_{l'} S_{ll'} p_{l'}.$$

On a nommé (**40°**) *faisceau-point* $\bar{x}$ la figure constituée par les droites issues d'un point x, et *faisceau-plan* $\bar{u}$ (**52°**) la figure constituée par les droites situées dans un plan u.

Il convient d'examiner comment les figures $\bar{x}$ et $\bar{u}$ se comportent vis-à-vis de l'opération $\mathcal{S}$.

83. Appelons e le point $x_1 \neq 0$, $x_2 = x_3 = \ldots x_n = 0$. Soient p_α, $\left\{ \alpha = 1, 2, \ldots, \binom{n-1}{m} \right\}$, les $\binom{n-1}{m}$ p_l où l'indice 1 manque et p_β, $\left\{ \beta = 1, 2, \ldots, \binom{n-1}{m-1} \right\}$, les $\binom{n-1}{m-1}$ p_l où l'indice 1 figure. Si l'on se reporte aux considérations du 35°, on voit que les équations $p_\alpha = 0$ définissent le faisceau-point $\bar{e}$, les p_β étant liées par un système fondamental $\Omega(n-1, m-1)$.

84°. Proposons-nous le problème suivant : quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que la substitution ou opération $\mathcal{S}$ laisse fixe le faisceau-point $\bar{e}$?

Autrement dit

$$\mathcal{S}[\bar{e}] = \bar{e}.$$

Ces conditions sont évidemment $q_\alpha = 0$, sous le bénéfice de $p_\alpha = 0$.

Si α' et β' sont des indices analogues à α et β respectivement, on peut écrire

$$\mathrm{S}[p_\alpha] = q_\alpha = \sum_{\alpha'} \mathrm{S}_{\alpha\alpha'} p_{\alpha'} + \sum_{\beta'} \mathrm{S}_{\alpha\beta'} p_{\beta'},$$

$$\mathrm{S}[p_\beta] = q_\beta = \sum_{\alpha'} \mathrm{S}_{\beta\alpha'} p_{\alpha'} + \sum_{\beta'} \mathrm{S}_{\beta\beta'} p_{\beta'}.$$

On doit donc avoir

$$\sum_{\beta'} \mathrm{S}_{\alpha\beta'} p_{\beta'} = 0.$$

Les $p_{\beta'}$ sont linéairement indépendantes (27°) comme coordonnées d'une droite de degré $m-1$ dans un espace à $n-2$ dimensions. Fina-

lement

$$(o)\qquad \left\{ \begin{array}{c} S_{\alpha\beta'} = 0, \\ \left\{ \alpha = 1, 2, \ldots, \binom{n-1}{m}; \quad \beta' = 1, 2, \ldots, \binom{n-1}{m-1} \right\} \end{array} \right\}.$$

Alors

$$|S| = |S_{\alpha\alpha'}|\,|S_{\beta\beta'}| \neq 0; \qquad |S_{\alpha\alpha'}| \neq 0; \qquad |S_{\beta\beta'}| \neq 0.$$

La matrice $\binom{n-1}{m-1}$-aire $[S_{\beta\beta'}]$ est évidemment normale pour le degré $m-1$ dans l'espace à $n-2$ dimensions.

La formule (o) résout le problème posé.

85°. Soient deux n-aires ξ et η, avec les z_j pour coordonnées ponctuelles courantes,

$$\xi = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 z_1 \\ z_j & x_1 z_j - x_j z_1 \end{vmatrix}, \qquad \eta = \begin{vmatrix} z_1 & y_1 z_1 \\ z_j & y_1 z_j - y_j z_1 \end{vmatrix}$$

analogues à la n-aire t du 77°.

Si X et Y désignent (78°) $\Delta_m \xi$ et $\Delta_m \eta$ respectivement, on sait (77° et 80°) que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} X &= \left[X_{u'}\left(\overset{1}{x}\right)\right], & X &= \left[Y_{u'}\left(\overset{1}{y}\right)\right], \\ X^{-1} &= \left[\Xi_{u'}\left(\overset{1}{x}\right)\right], & Y^{-1} &= \left[H_{u'}\left(\overset{1}{y}\right)\right], \end{aligned}$$

$X_{u'}\left(\overset{1}{x}\right)$, $\Xi_{u'}\left(\overset{1}{x}\right)$, $Y_{u'}\left(\overset{1}{y}\right)$, $H_{u'}\left(\overset{1}{y}\right)$ = formes linéaires et homogènes par rapport aux x_j ou aux y_j.

Enfin $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ seront les opérations géométriques qui correspondent à X et Y.

86°. Nous sommes à même de chercher quelles conditions sont nécessaires et suffisantes pour que l'opération $\mathcal{S}$ fournisse le faisceau-point $\overline{y}$

comme image du faisceau-point $\bar{x}$,

$$\bar{y} = \mathcal{S}[\bar{x}].$$

Avec les notations du 83°, on a

$$e = \xi[x], \qquad e = \eta[y], \qquad \bar{e} = \mathfrak{X}[\bar{x}], \qquad \bar{e} = \mathfrak{Y}[\bar{y}];$$
$$\bar{x} = \mathfrak{X}^{-1}[\bar{e}], \qquad \bar{y} = \mathfrak{Y}^{-1}[\bar{e}].$$

Puis

$$y = \mathfrak{Y}^{-1}[\bar{e}] = \mathcal{S}[\bar{x}] = \mathcal{S}\mathfrak{X}^{-1}[\bar{e}],$$
$$\bar{e} = \mathfrak{Y}\mathcal{S}\mathfrak{X}^{-1}[\bar{e}] = \mathfrak{T}[\bar{e}].$$

Nommons $T = YSX^{-1} = [T_{ll'}]$ la $\binom{n}{m}$-aire qui correspond à l'opération géométrique $\mathfrak{T}$. En vertu des explications du **84°**, $\mathfrak{T}$ laisse immobile le faisceau-point $\bar{e}$ et, {formule (o) du **84°**},

$$T_{\alpha\beta'} = 0.$$

Mais (85°) $T_{\alpha\beta'} = T_{\alpha\beta'}\left(\overset{1}{x}; \overset{1}{y}; \overset{1}{S}\right)$ est une forme linéaire

des coordonnées	x_j	du point	x,
»	y_j	»	y,
des coefficients	$S_{ll'}$	de la matrice	S.

Les $\binom{n-1}{m}\binom{n-1}{m-1}$ égalités

$$(1) \qquad T_{\alpha\beta'}(x; y; S) = 0$$

sont donc la condition nécessaire et suffisante pour que le faisceau-point $\bar{y}$ soit l'image par $\mathcal{S}$ du faisceau-point $\bar{x}$.

87°. C'est par une méthode entièrement analogue qu'on traitera le problème, correspondant dualistique du précédent : à quelles conditions

la substitution $\mathcal{S}$ admet-elle le faisceau-plan $\bar{v}$ pour image du faisceau-plan $\bar{u}$?

On introduira (83°) le plan ε, de coordonnées

$$u_1 \neq 0, \qquad u_2 = \ldots = u_n = 0.$$

Les équations $p_\beta = 0$ définissent le faisceau-plan ε, les p_α étant liés par un système fondamental $\Omega(n-1, m)$. Tout cela résulte immédiatement du 83°.

Les conditions pour que $\mathcal{S}[\bar{\varepsilon}] = \bar{\varepsilon}$ s'obtiennent sans difficulté au moyen du 84°. Ces conditions sont $q_\beta = 0$, sous le bénéfice de $p_\beta = 0$, c'est-à-dire

$$\text{(2)} \qquad S_{\beta\alpha'} = 0.$$

Prenant les w_j pour coordonnées planaires courantes, on introduira deux matrices n-aires υ et φ, analogues à ξ et η du 85°, savoir :

$$\upsilon = \begin{vmatrix} w_1 & u_1 w_1 \\ w_j & u_1 w_j - u_j w_1 \end{vmatrix}, \qquad \varphi = \begin{vmatrix} w_1 & v_1 w_1 \\ w_j & v_1 w_j - v_j w_1 \end{vmatrix}.$$

Les collinéations planaires υ et φ se traduisent sur les coordonnées ponctuelles par les collinéations υ'^{-1} et φ'^{-1} et, sur les coordonnées p_l, par les collinéations $\binom{n}{m}$-aires $\Delta_m \upsilon'^{-1}$ et $\Delta_m \varphi'^{-1}$. En vertu de la formule (III) du 79°, on peut introduire, au lieu de

$$\Delta_m \upsilon'^{-1} \quad \text{et} \quad \Delta_m \varphi'^{-1},$$

respectivement

$$\mathrm{U} = \left[\mathrm{U}_{ll'}\binom{1}{u}\right] \qquad \text{ou} \qquad \Delta_{n-m}\upsilon,$$

$$\mathrm{V} = \left[\mathrm{V}_{ll'}\binom{1}{v}\right] \qquad \text{ou} \qquad \Delta_{n-m}\varphi,$$

matrices $\binom{n}{m}$-aires, $\left\{\text{puisque } \binom{n}{n-m} = \binom{n}{m}\right\}$, analogues à X et Y

du **85°**. U et V conduisent aux opérations géométriques $\mathfrak{V}$ et $\mathfrak{Y}$ analogues à $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ du **85°**.

On a encore

$$\upsilon[u] = \varepsilon, \qquad \varphi[v] = \varepsilon,$$
$$u = \upsilon^{-1}[\varepsilon], \qquad v = \varphi^{-1}[\varepsilon],$$

et, {introduisant les faisceaux-plans $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{\varepsilon}$},

$$\bar{u} = \mathfrak{V}^{-1}[\bar{\varepsilon}], \qquad \bar{v} = \mathfrak{Y}^{-1}[\bar{\varepsilon}].$$

La relation cherchée

$$\bar{v} = \mathcal{S}[\bar{u}]$$

donne

$$\mathfrak{Y}^{-1}[\bar{\varepsilon}] = \mathcal{S}\mathfrak{V}^{-1}[\bar{\varepsilon}].$$

Posons $\mathfrak{P} = \mathfrak{Y}\mathcal{S}\mathfrak{V}^{-1}$; on aura $\mathfrak{P}[\bar{\varepsilon}] = \bar{\varepsilon}$.

Si $\mathrm{P} = [\mathrm{P}_{ii'}]$ est la $\binom{n}{m}$-aire

$$\mathrm{P} = \mathrm{VSU}^{-1},$$

on a, comme au **86°**, $\mathrm{P}_{ii'}\left(\overset{1}{u}; \overset{1}{v}; \mathrm{S}\right) =$ forme linéaire en u_j, v_j, $\mathrm{S}_{ii'}$.

Les relations

$$\mathrm{P}_{\beta\alpha'}(u; v; \mathrm{S}) = 0,$$

analogues aux relations (2) ci-dessus, sont la condition nécessaire et suffisante pour que le faisceau-plan $\bar{v}$ soit l'image par $\mathcal{S}$ du faisceau-plan $\bar{u}$.

88°. Je n'insisterai pas sur les diverses questions géométriques que permettent de résoudre les considérations du présent Chapitre.

Par exemple, cherchons les faisceaux-points $\bar{x}$ ou faisceaux-plans $\bar{u}$ que l'opération $\mathcal{S}$ laisse fixe,

$$\mathcal{S}[\bar{x}] = \bar{x}, \qquad \mathcal{S}[\bar{u}] = \bar{u},$$

$\bar{x}$ et $\bar{u}$ s'obtiennent par les équations

$$T_{\alpha\beta'}(x; x; S) = 0 \qquad (86^\circ),$$
$$P_{\beta\alpha'}(u; u; S) = 0 \qquad (87^\circ),$$

quadratiques par rapport aux inconnues x_j ou u_j.

89°. Passons maintenant à la solution du problème principal.

CHAPITRE IX.

Conditions J pour qu'une $\binom{n}{m}$-aire A soit une matrice $\Delta_m a$, a étant une matrice n-aire.

90°. Soit $A = [A_{ll'}]$, $\left\{l, l' = 1, 2, \ldots, \binom{n}{m}\right\}$, une $\binom{n}{m}$-aire de déterminant $|A| \neq 0$. Voici le problème qui va nous occuper, avec les notations du **78°**.

A quelles conditions $J(n, m)$ *nécessaires et suffisantes satisfait* A *pour qu'il existe une matrice n-aire* a, *telle que* $A = \rho\, \Delta_m a$, $\rho =$ *facteur de proportionnalité ?*

On sait (**76°**, *in fine*) que, si les conditions $J(n, m)$ sont satisfaites, la matrice n-aire a est définie à une puissance de θ près, $\theta =$ racine primitive $m^{\text{ième}}$ de l'unité.

91°. On peut employer la méthode des coefficients indéterminés. Introduisons les n^2 coefficients a_{kj}, $\{k, j = 1, 2, \ldots, n\}$, de la matrice $a = [a_{kj}]$, formons les $\binom{n}{m}^2$ mineurs m-aires de a, formes de dimension m par rapport aux a_{kj}, et égalons-les aux $\rho^{-1} A_{ll'}$. On a ainsi un système d'équations algébriques aux $n + 1$ inconnues ρ et a_{kj}.

Seulement ce procédé n'en est pas un. Il conduit à des éliminations compliquées, pour parvenir aux conditions $J(n, m)$ entre les $A_{ll'}$. Enfin les calculs ne se prêtent à aucune interprétation simple.

Aussi allons-nous développer une autre méthode, fondée sur les considérations des Chapitres précédents.

92°. Il est évident qu'une première condition $J(n, m)$ est celle-ci : A est normale (**71°**), c'est-à-dire admet pour invariant le système fondamental $\Omega(n, m)$.

Cette condition est nécessaire, mais elle est insuffisante. On s'en assure par l'exemple le plus simple.

Soit le cas $n = 4$, $m = 2$, $\binom{n}{m} = 6$. Prenons les six coordonnées-points

$$p_{12} \quad p_{34} \quad p_{23} \quad p_{14} \quad p_{31} \quad p_{24}$$

d'une droite, ou les six coordonnées-plans

$$\varpi_{12} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \varpi_{24}$$

avec

$$\frac{\varpi_{12}}{p_{34}} = \frac{\varpi_{34}}{p_{12}} = \frac{\varpi_{23}}{p_{14}} = \frac{\varpi_{14}}{p_{23}} = \frac{\varpi_{31}}{p_{24}} = \frac{\varpi_{24}}{p_{31}}$$

et la relation fondamentale unique

$$0 = p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} = \mathcal{Q}$$

(*voir* **22°**, **31°** et **39°**).

Considérons la senaire normale

$$\begin{vmatrix} p_{12} & p_{34} & p_{23} & p_{14} & p_{31} & p_{24} \\ p_{34} & p_{12} & p_{14} & p_{23} & p_{24} & p_{31} \end{vmatrix} = \mathrm{A}.$$

Il n'existe aucune matrice quaternaire a telle que $\mathrm{A} = \rho\,\Delta_2 a$. L'opération géométrique $\mathcal{A}$, qui correspond à la senaire A, n'est pas une collinéation ponctuelle, mais la transformation par polaires réciproques avec

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

pour quadrique de base.

L'algorithme de cette transformation est

$$\begin{vmatrix} x_j & u_j \\ u_j & x_j \end{vmatrix} \qquad \{j = 1, 2, 3, 4\}$$

ou la *substitution d'échange* (*voir* VI, *Index* 6° de la troisième Partie).

Retenons donc une première condition nécessaire :

CONDITION J_1. — A *est normale.*

93°. La n-aire a, supposée existante, possède, si y est le point-image par a du point x, les propriétés bien connues que voici : pour tout x, y est défini sans ambiguïté; et réciproquement; si x parcourt tout l'espace, y parcourt aussi tout l'espace.

On exprimera ces propriétés par la locution suivante : *a permute entre eux tous les points de l'espace.*

De même a, qui se traduit sur les coordonnées planaires u_j par la n-aire a'^{-1} permute entre eux tous les plans de l'espace.

94°. Le faisceau-point $\bar{x}$ et le point x se définissent mutuellement sans ambiguïté. La $\binom{n}{m}$-aire $\Delta_m a$ permute donc entre eux tous les faisceaux-points de l'espace.

Il vient ainsi une seconde condition nécessaire.

CONDITION J_2. — *L'opération* $\mathcal{A}$ *permute entre eux les différents faisceaux-points de l'espace.*

95°. Le faisceau-plan $\bar{u}$ et le plan u se définissent mutuellement sans ambiguïté et nous pouvons formuler de même une troisième condition nécessaire.

CONDITION J_3. — *L'opération* $\mathcal{A}$ *permute entre eux les différents faisceaux-plans de l'espace.*

Cherchons si les trois conditions J_1, J_2, J_3 combinées assurent la solution du problème du **90°**, c'est-à-dire l'existence de la n-aire a, telle que $A = \rho\, \Delta_m a$.

96°. Nommons $\bar{y}$ le faisceau-point image par $\mathcal{A}$ du faisceau-point $\bar{x}$,

$$\bar{y} = \mathcal{A}[\bar{x}].$$

On a alors entre les x_j et les y_j les relations (1) du **86°** que nous écrirons

$$\mathrm{T}_\lambda(\overset{1}{x}; \overset{1}{y}) = 0 \qquad \left\{\lambda = 1, 2, \ldots, \binom{n-1}{m}\binom{n-1}{m-1}\right\},$$

T_λ = forme bilinéaire en x_j et y_j.

En vertu de la condition J_2, pour x donné quelconque, y est unique et bien déterminé, et réciproquement. Donc, pour x donné, les rapports des y_j sont déterminés et

$$\mathrm{Rg}\left[\frac{\partial \mathrm{T}_\lambda}{\partial y_j}\right] = n - 1.$$

Pareillement

$$\mathrm{Rg}\left[\frac{\partial \mathrm{T}_\lambda}{\partial x_j}\right] = n - 1.$$

Dans les Tableaux

$$\left[\frac{\partial \mathrm{T}_\lambda}{\partial y_j}\right] \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial \mathrm{T}_\lambda}{\partial x_j}\right]$$

à n colonnes et à $\binom{n-1}{m}\binom{n-1}{m-1}$ lignes tous les mineurs n-aires sont nuls. Les y_j et les x_j sont proportionnelles à des mineurs $(n-1)$-aires. On a donc, $\{\alpha_0, \beta_0$ = facteur de proportionnalité $\}$,

$$\alpha_0 y_j = \varphi_j(\overset{\mu}{x}), \qquad \beta_0 x_j = \theta_j(\overset{\varpi}{y}),$$
$$\mu \leqq n - 1, \qquad \varpi \leqq n - 1,$$

les φ_j et θ_j étant des formes d'ordre μ et ϖ respectivement.

Toujours en vertu de la condition J_2 quand x (ou y) parcourt tout l'espace, il en est de même pour y (ou x).

Donc la transformation

$$\sigma = |z_j \quad \varphi_j(z)|, \qquad \sigma^{-1} = |z_j \quad \theta_j(z)|$$

est une substitution ponctuelle birationnelle, c'est-à-dire une substitution Cremona.

Si $\mu = 1$, σ est précisément la n-aire a cherchée. Tout se réduit à voir si $\mu = 1$.

Il va sans dire que les n formes φ ou θ sont supposées débarrassées de leur p. g. c. d.

97°. Par un raisonnement analogue, la condition J_2 conduit aux relations (87°)

$$P_\lambda(u; v) = 0 \qquad \left\{\lambda = 1, 2, \ldots, \binom{n-1}{m}\binom{n-1}{m-1}\right\},$$

avec

$$\mathrm{Rg}\left[\frac{\partial P_\lambda}{\partial u_j}\right] = \mathrm{R}_g\left[\frac{\partial P_\lambda}{\partial v_j}\right] = n-1,$$

et à une substitution planaire Cremona

$$\tau = \left|w_j \quad \psi_j(\overset{\nu'}{w})\right|, \qquad \tau^{-1} = \left|w_j \quad \eta_j(\overset{\chi'}{w})\right|,$$
$$\nu' \leqq n-1, \qquad \chi' \leqq u-1.$$

98°. L'*élément* (z, w) étant constitué par le point z et le plan w, passent par z, $\Sigma wz = 0$, prenons la substitution birationnelle entre éléments (*Sur les formes mixtes*, Chapitre I de la troisième Partie)

$$a = \begin{vmatrix} z_j & \varphi_j(\overset{\mu}{z}; \overset{0}{w}) \\ w_j & \psi_j(\overset{0}{z}; \overset{\nu'}{w}) \end{vmatrix}, \qquad a^{-1} = \begin{vmatrix} z_j & \theta_j(\overset{\varpi}{z}; \overset{0}{w}) \\ w_j & \eta_j(\overset{0}{z}; \overset{\chi'}{w}) \end{vmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} \mu & 0 & \varpi & 0 \\ 0 & \nu' & 0 & \chi' \end{array}\right)$$

où les φ, ψ, θ, η sont des formes mixtes avec μ, o, ϖ, o pour ordres et o, ν', o, χ' pour classes respectivement.

Je dis que a est une substitution crémonienne, c'est-à-dire admet pour invariants les expressions

$$\Sigma w z \quad \text{et} \quad \Sigma w\, dz.$$

99°. Soient :

p une droite quelconque de l'espace;
x un point situé sur p;
u un plan passant par p;
q la droite image de p par $\mathcal{A}$;
y le point image de x par σ (**96°**);
v le plan image de u par τ (**97°**);
$x + dx$ un point pris sur p infiniment près de x;
$y + dy$ le point image de $x + dx$ par σ.

x, $x + dx$ sont sur u. On peut, sans que p cesse d'être quelconque, supposer que $x + dx$ est un point quelconque de u, infiniment voisin de x.

Puisque l'on a

$$v = \tau[u], \qquad y = \sigma[x], \qquad y + dy = \sigma[x + dx],$$

on a aussi, en vertu de **96°** et **97°** et parce que $q = \mathcal{A}[p]$, les relations suivantes :

q est située sur le faisceau-plan $\bar{v}$ et sur le plan v;

q est située sur les deux faisceaux-points $\bar{y}$ et $\overline{y + dy}$ et passe par les deux points y et $y + dy$.

Donc le plan v, qui contient q, passe par les deux points y et $y + dy$; il vient

$$(1) \qquad \Sigma v y = \Sigma \varphi\psi = 0 \quad \text{sous le bénéfice de} \quad \omega = \Sigma w z = 0,$$
$$\Sigma v\, dy = 0 \quad \text{sous le bénéfice de} \quad \Sigma w\, dz,$$

c'est-à-dire

$$\Sigma\psi\, d\varphi = 0. \tag{2}$$

En vertu des théories générales sur les formes mixtes, il faut, pour la relation (1), que l'expression

$$\Sigma\psi(z;w)\varphi(z;w)$$

soit identique à $\omega K(z;w)$, K étant un polynome homogène en z_j et en w_j (*Sur les formes mixtes*, deuxième Partie, **22°**).

Ainsi $\omega = \Sigma wz$ est déjà un invariant pour la substitution a du **98°**.

100°. La relation (2) ou, $\{i, j, = 1, 2, \ldots, n\}$,

$$\sum \psi\, d\varphi = \sum_i \psi_i \sum \frac{\partial\varphi_i}{\partial z_j} dz_j = \sum_j dz_j \sum_i \psi_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial z_j} = H_0 \sum_i H_j dz_j = 0,$$

où les H_j sont des formes mixtes premières entre elles, doit être, en ce qui concerne les indéterminées dz_j, une conséquence de $\Sigma w\, dz$; le quotient $H_j : w_j =$ la fraction irréductible $L:M$, où L et M sont deux formes mixtes.

Il vient

$$MH_j = w_j L.$$

M ne pouvant avoir aucun diviseur commun avec w_j, ni L, tout en divisant le produit $w_j L$, est forcément une constante. Par un motif analogue L est une constante.

On peut écrire

$$L:M = 1 \qquad \text{et} \qquad H_j = w_j, \qquad \Sigma\psi\, d\varphi = H_0 \Sigma w\, dz.$$

$\Sigma w\, dz$ est bien un invariant pour la substitution a.

La présente démonstration est une application des théories exposées dans la deuxième Partie du Mémoire *Sur les formes mixtes*, sur le calcul des formes mixtes.

101°. Ainsi la substitution a est crémonienne comme admettant les deux invariants $\Sigma w z$ et $\Sigma w\, dz$.

Dans la crémonienne a, les formes mixtes φ ont la classe zéro; donc (*Sur les formes mixtes,* troisième Partie, Chapitre V), la crémonienne devient crémonique.

Appliquons la formule (*loc. cit.,* **59°**) générale des crémoniques s, dans l'espace à $N-1$ dimensions,

$$s=\left(\begin{matrix} m & 0 \\ (m-1)(N-1) & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} p & 0 \\ (p-1)(N-1) & 1 \end{matrix}\right), \qquad \text{avec} \qquad s=\mathrm{a},$$

et comparons-la à la formule ci-dessous (**98°**)

$$\mathrm{a}=\left(\begin{matrix} \mu & 0 \\ 0 & \nu' \end{matrix}\middle|\begin{matrix} \varpi & 0 \\ 0 & \chi' \end{matrix}\right).$$

Il vient $m=\mu$; $(m-1)(N-1)=0$; $p=\varpi$; $(p-1)(N-1)=0$; $\nu'=1$; $\chi'=1$. Comme

$$N-1\neq 0,$$

il vient finalement

$$1=\mu=\varpi=\nu'=\chi'.$$

a se confond avec la crémonique linéaire citée au **60°** de la troisième Partie du Mémoire précité.

Cela assure (**96°**, *in fine*) l'existence de la matrice n-aire a.

102°. Nous sommes maintenant à même de formuler une proposition définitive qui donne la solution du problème du **90°**.

THÉORÈME. — *Soient :*

A *une matrice* $\binom{n}{m}$*-aire de déterminant* $|A|\neq 0$;

$\mathcal{A}$ *l'opération géométrique correspondant à la collinéation* A, *effectuée sur les coordonnées plückériennes* p_t.

Pour qu'il existe une matrice n-aire a, telle que { ρ = *facteur de proportionnalité* },

$$A = \rho\, \Delta_m a,$$

les trois conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes :

J_1. *La collinéation* A *est normale, c'est-à-dire admet pour invariant le système fondamental* $\Omega(n, m)$.

J_2. *L'opération* $\mathcal{A}$ *permute entre eux les différents faisceaux-points de l'espace.*

J_3. *L'opération* $\mathcal{A}$ *permute entre eux les différents faisceaux-plans de l'espace.*

103°. Les conditions J ont été obtenues par des considérations géométriques et en opérant exclusivement sur des coordonnées homogènes x_j, u_j, p_l. Ces conditions, une fois vérifiées pour A et a, ne cessent pas de l'être pour RA et ra, R et r étant deux constantes quelconques, différentes de zéro.

Supposons donc

$$A = \rho\, \Delta_m a, \tag{o}$$

d'où

$$|A| = \rho^{\binom{n}{m}} |\Delta_m a| = \rho^{\binom{n}{m}} \mathrm{a}^{\binom{n-1}{m-1}}.$$

$\mathrm{a} = |a|$, en vertu de théories connues.

Il viendra donc encore

$$|A| = \rho^{\binom{n}{m}} \mathrm{a}^{\binom{n-1}{m-1}}. \tag{1}$$

On aura de même, comme il vient d'être expliqué,

$$RA = \rho' \Delta_m (ra).$$

Je vais chercher à déterminer les deux constantes r et R de façon à

avoir

$$(2)\qquad |RA| = 1,$$

$$(3)\qquad |ra| = 1,$$

et $\rho' = 1$, c'est-à-dire

$$RA = \Delta_m(ra) = r^m \Delta_m a,$$

c'est-à-dire

$$(4)\qquad R\rho = r^m,$$

eu égard à (0).

On tire de là

$$R^{\binom{n}{m}} = |A|^{-1}, \qquad r^n = a^{-1}, \qquad \rho = r^m R^{-1}.$$

Il faut montrer que la valeur de ρ, ainsi obtenue, satisfait à (1).

Il viendrait, substituant dans (1),

$$|A| = r^{m\binom{n}{m}} R^{-\binom{n}{m}} a^{\binom{n-1}{m-1}},$$

$$R^{\binom{n}{m}} |A| = |RA| = 1 = r^{m\binom{n}{m}} a^{\binom{n-1}{m-1}},$$

eu égard à (2). Mais $a = r^{-n}$ et

$$1 = r^{m\binom{n}{m}} r^{-n\binom{n-1}{m-1}}.$$

Cela est exact, car $m\binom{n}{m} = n\binom{n-1}{m-1}$.

En résumé : *il est licite, sans restreindre la généralité et eu égard aux conditions* J, *de poser*

$$|A| = 1, \qquad |a| = 1, \qquad A = \Delta_m a.$$

C'est ce que nous ferons désormais.

La $\binom{n}{m}$-aire A ne change pas quand on multiplie la n-aire a par une puissance de τ, $\tau^m = 1$. Si l'on veut que le déterminant de la n-aire reste égal à un, il faut poser $\tau^n = 1$. Nommons δ le p. g. c. d. des deux entiers m et n, et θ une racine primitive $\delta^{\text{ième}}$ de l'unité. A A donnée correspondent les δ n-aires

$$a, \quad a\theta, \quad \ldots, \quad a\theta^{\delta-1}.$$

CHAPITRE X.

Construction, pour une $\binom{n}{m}$-aire donnée A, satisfaisant aux conditions J, d'une matrice n-aire a, telle que $A = \Delta_m a$.

104°. Quelles relations les conditions J du théorème du **102°** introduisent-elles entre les $\binom{n}{m}^2$ coefficients $A_{ll'}$ de la matrice A?

Soient $\varphi_1(p) = 0$, $\varphi_2(p) = 0$, ... les relations fondamentales. D'après les explications des Chapitres II et III, on peut admettre que les φ sont des formes quadratiques par rapport aux p_l. La condition J_1 exprime que les quantités $q_l = A[p_l] = \sum_{l'} A_{ll'} p_{l'}$ sont les coordonnées d'une droite q; donc

$$\varphi_1(q) = \psi_1(p) = 0,$$
$$\varphi_2(q) = \psi_2(p) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les deux systèmes

$$\Phi \qquad \varphi_1(p) = 0, \qquad \varphi_2(p) = 0, \qquad \ldots,$$
$$\Psi \qquad \psi_1(p) = 0, \qquad \psi_2(p) = 0, \qquad \ldots$$

doivent avoir les mêmes solutions. Le problème se traitera, sans irrationnalités, par exemple, suivant les méthodes indiquées par M. König,

dans son Livre *Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Grössen,* notamment aux Chapitres V et VI du Livre (*Gesamtresolvente,* etc.). On aura un certain nombre de relations

$$F_1(A) = 0, \qquad F_2(A) = 0, \qquad \ldots,$$

où les F sont des formes par rapport aux $A_{ll'}$. Les coefficients de ces formes ne contiennent que les coefficients des formes quadratiques φ et ne dépendent ainsi que des deux entiers n et m.

105°. Passons aux conditions J_2 et J_3. On calculera les expressions

$$T_{\alpha\beta'}(\overset{1}{x}; \overset{1}{y}; \overset{1}{A}) \qquad (86°),$$
$$P_{\beta\alpha'}(\overset{1}{u}; \overset{1}{v}; \overset{1}{A}) \qquad (87°);$$

ce sont des formes trilinéaires, à trois séries de variables $A_{ll'}$ et x_j et y_j (ou u_j et v_j).

Les conditions J_2 et J_3 s'expriment algébriquement par les relations

$$n-1 = \mathrm{Rg}\left[\frac{\partial T_{\alpha\beta'}}{\partial y_j}\right] = \mathrm{Rg}\left[\frac{\partial T_{\alpha\beta'}}{\partial x_j}\right] = \mathrm{Rg}\left[\frac{\partial P_{\beta\alpha'}}{\partial v_j}\right] = \mathrm{Rg}\left[\frac{\partial P_{\beta\alpha'}}{\partial u_j}\right],$$

c'est-à-dire par l'évanouissement de tous les mineurs n-aires de ces quatre Tableaux à n-colonnes et à $\binom{n-1}{m}\binom{n-1}{m-1}$ lignes. Un pareil mineur H sera une forme de degré n par rapport aux $A_{ll'}$ et de degré n par rapport aux x_j par exemple (ou y_j, ou u_j, ou v_j). H est nul pour tout point x et il faut égaler à zéro les formes d'ordre n en $A_{ll'}$, coefficients, dans H, des produits tels que

$$x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}, \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots = n.$$

Bref, les conditions J_2 et J_3 amènent à écrire

$$f_1(A) = 0, \qquad f_2(A) = 0, \qquad \ldots,$$

les f étant des formes d'ordre n en $A_{ll'}$. Comme plus haut, les coefficients de ces formes ne dépendent que des entiers n et m.

106°. Les conditions $J(n, m)$, c'est-à-dire J_1, J_2 et J_3, étant supposées vérifiées, ainsi qu'il vient d'être expliqué, comment calculerons-nous les coefficients a_{kj} de la matrice n-aire $a = [a_{kj}]$, telle que $A = \Delta_m a$, $\{k, j = 1, 2, \ldots, n\}$?

Un premier procédé consiste à suivre la même marche qu'au Chapitre précédent. On construira les substitutions Cremona ponctuelle σ (**96°**) et planaire τ (**97°**), puis la crémonique a (**98°** à **101°**). En vertu des conditions J, la crémonique devient linéaire, comme il est expliqué au précédent Chapitre IX, et l'on a a.

Le présent Chapitre a pour but de montrer que ce procédé général peut souvent être simplifié.

Auparavant, signalons quelques propriétés évidentes des conditions J.

107°. Reprenons les formules I, II et III du **79°**. On a simultanément

$$A = \Delta_m a, \qquad A' = \Delta_m a', \qquad A^{-1} = (\Delta_m a)^{-1} = \Delta_m a^{-1};$$

donc : *si la* $\binom{n}{m}$*-aire* A, *avec* $|A| = 1$, *satisfait aux conditions* J, *il en est de même pour* A' *et pour* A^{-1}.

De même, toujours eu égard au **79°** et, puisque $a = |a| = 1$,

$$A = \Delta_m a = \Delta_{n-m} b, \qquad b = a'^{-1};$$

donc : A *satisfait simultanément aux conditions* $J(n, m)$ *et* $J(n, n-m)$, et *les conditions* $J(n, m)$ *et* $J(n, n-m)$ *coïncident.*

108°. Quand on sait d'avance, par exemple par hypothèse, que les conditions J sont remplies, on peut construire directement la matrice n-aire a par un procédé simplifié, qu'il nous reste à exposer.

109°. Traitons d'abord le cas particulier où A est canonique, $A_{ll'} = 0$ pour $l' \neq l$, $A_{ll} = A_l \neq 0$.

On a vu (75°) que a est aussi canonique, $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, $a_{jj} = a_j$.

Tout se réduit à trouver n paramètres a_j tels que, si $l = (j_1 j_2 \ldots j_m)$, $A_l = a_{j_1} \ldots a_{j_m}$.

On a vu (76°) que, si le problème est possible, la matrice n-aire a est définie à une puissance de θ près, θ = racine primitive $m^{\text{ième}}$ de l'unité.

Autrement dit, dans le cas actuel, si les équations

$$(1)' \qquad \begin{cases} A_l = a_{j_1} \ldots a_{j_m}, \\ a_1 \ldots a_n = 1 \end{cases}$$

aux inconnues a_j admettent au moins une solution, cette solution, ou ces solutions, sont telles que les quantités

$$a_1^m \quad \text{et} \quad a_j : a_1$$

sont définies d'une façon unique et bien déterminée.

Nommons b_l et α_j le logarithme népérien de A_l et de a_j respectivement; les équations (1)′ deviennent

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} b_l = \sum_j N_{lj} \alpha_j, \\ 0 = \sum_j \alpha_j, \end{array} \right\} \quad N_{lj} = \text{zéro ou unité}.$$

L'élimination des inconnues α_j conduit entre les b_l à diverses relations telles que

$$(2) \qquad \sum_l M_l b_l = 0, \qquad M_l = \text{entier réel ou zéro},$$

qui sont la traduction des conditions J.

Revenant aux A_l, on a diverses relations

$$(3) \qquad 1 = \prod_l A_l^{M_l} = F(A),$$

F étant un monome.

Sous le bénéfice des équations (2) et (3), les quantités a_1^m et $a_j : a_1$, c'est-à-dire $m\alpha_1$ et $\alpha_j - \alpha_1$, sont définies par le système (1) sans ambiguïté.

Si l'on écrit $P \equiv 0 \pmod{b}$ pour exprimer que

$$P = \sum_l b_l M_l, \qquad M_l = \text{entier réel},$$

on tirera du système (1), $\{f(A) = \text{monome}\}$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} m\alpha_1 \equiv 0 \\ \alpha_j \equiv \alpha_1 \end{array} \right\} \bmod b;$$

c'est-à-dire, en passant des logarithmes aux nombres,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = [f_1(A)]^{\frac{1}{m}} \\ a_j = a_1 f_j(A) \end{array} \right\}.$$

La matrice a sera ainsi complètement construite.

110°. Un logarithme népérien n'est déterminé qu'à $2k\pi i$ près, où $k =$ entier réel, $i = \sqrt{-1}$; mais on reconnaît facilement que cette indétermination ne change rien aux résultats précédents.

111°. Revenons maintenant au cas général (**108°**). Il existe, par suite des conditions J supposées vérifiées, une n-aire a telle que

$$A = \Delta_m a.$$

Il s'agit de calculer a, la $\binom{n}{m}$-aire A étant donnée.

Dans l'espace $\mathfrak{E}$ à $n-1$ dimensions, prenons le n-èdre de référence et nommons X_j un de ses n sommets ; pour X_j on a $x_j \neq 0$, les autres coordonnées étant nulles.

Prenons m sommets d'indices $j_1 \ldots j_m$; nommons l l'indice, compris entre 1 et $\binom{n}{m}$, qui correspond à la combinaison $(j_1 \ldots j_m)$. La droite des m sommets sera l'*arête* T_l du tétraèdre. Pour T_l, la coordonnée p_l est seule différente de zéro.

112°. Si $\left\{g, l = 1, 2, \ldots, \binom{n}{m}\right\}$,

$$A = [A_{gl}] = \left| p_g \quad \sum A_{gl} p_l \right| = | p_g \quad A[p_g] |,$$

en vertu des conditions J_1 les $A[p_g]$ sont les coordonnées q_g de la droite $q = \mathcal{A}[p]$.

Si p coïncide avec l'arête T_l du tétraèdre de référence, la droite $Q_l = \mathcal{A}[T_l]$ aura pour coordonnée q_g le coefficient A_{gl} de A.

Ainsi : *dans la matrice* A, *le* $g^{\text{ième}}$ *élément de la colonne* $l^{\text{ième}}$ *est proportionnel à la coordonnée* q_g *d'une droite* Q_l.

Comme la transposée A' possède (**107°**) les mêmes propriétés que la matrice A, *l'élément* $l^{\text{ième}}$ A_{gl} *de la* $g^{\text{ième}}$ *ligne est proportionnel à la coordonnée* p_l *d'une droite* P_g.

113°. Prenons les diverses arêtes du n-èdre de référence issues d'un sommet X_j et situées par suite sur le faisceau-point $\overline{X_j}$; soient $T_l, T_{l'}, \ldots$ ces arêtes.

Leurs images $Q_l, Q_{l'}, \ldots$ seront, en vertu de la condition J_2, situées sur un certain faisceau-point $\overline{c_j}$,

$$\overline{c_j} = \mathcal{A}[\overline{X_j}].$$

Les droites $Q_l, Q_{l'}, \ldots$ sont connues (**112°**) dès qu'on possède A. Leur

unique point commun sera c_j qui s'obtiendra par le procédé du **41°**, sans ambiguïté.

Si l'arête T_l est celle des m sommets $X_{j_1} \dots X_{j_m}$, son image $Q_l = A[T_l]$ sera la droite des m points $c_{j_1} \dots c_{j_m}$.

Convenons de fixer la valeur absolue des coordonnées ponctuelles homogènes par la relation

$$\sum c_j x_j = 1,$$

c_j = constante numérique arbitrairement choisie une fois pour toutes. Les n coordonnées du point c_j, savoir les c_{ij}, $\{i = 1, 2, \dots, n\}$, sont complètement connues.

La considération des diverses arêtes T_l permet donc de construire une matrice n-aire

$$c = [c_{ij}];$$

on posera enfin

$$C = \Delta_m c.$$

114°. Dans les deux matrices n-aires a et c, considérons les mêmes mineurs m-aires

$$A_{gl} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ j_1 & \dots & \dots & j_m \end{pmatrix}_a, \qquad C_{gl} = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_m \\ j_1 & \dots & j_m \end{pmatrix}_c$$

formés avec les mêmes lignes $i_1 \dots i_m$ et les mêmes colonnes $j_1 \dots j_m$. Laissons l fixe, c'est-à-dire les m colonnes fixes, et faisons varier g, c'est-à-dire les lignes $i_1 \dots i_m$. On aura (**112°**) des quantités proportionnelles aux coordonnées q_g de la droite Q_l. Le quotient

$$A_{gl} : C_{gl}$$

est indépendant de l'indice g et peut se désigner par H_l. Alors

$$A_{gl} = H_l C_{gl},$$

c'est-à-dire

$$A = CH,$$

H étant la matrice *canonique* $\binom{n}{m}$-aire dont les H_i sont les coefficients.

On a (**79°**)

$$H = C^{-1}A = (\Delta_m c)^{-1}\Delta_m a = \Delta_m c^{-1}.\Delta_m a = \Delta_m c^{-1} a = \Delta_m h,$$

h étant la matrice n-aire $c^{-1}a$.

H étant canonique, on rentre dans le cas du **109°**. La matrice h se calculera par le procédé du **109°** et peut être supposée connue; la matrice c l'est aussi et il en est de même de la matrice $a = ch$.

113°. Il est évident que les n-aires, de déterminant $+1$, qui satisfont aux conditions J, forment un groupe G. Les $\binom{n}{m}$-aires $A = \Delta_m a$, $|A| = 1$ forment aussi un groupe Γ. A la substitution unité de $\mathcal{G}$ correspond la substitution unité de Γ. A la substitution unité de Γ correspondent dans G les δ puissances distinctes de la *singulière* (¹) θ, $\{\theta =$ racine primitive $\delta^{\text{ième}}$ de l'unité; $\delta =$ p. g. c. d. des deux entiers m et $n\}$, ainsi qu'on l'a vu (**103°**, *in fine*). Les groupes G et Γ sont isomorphes dans les conditions d'hémiédrie qui viennent d'être dites (*voir* aussi Chapitre VII).

(¹) M. Jordan nomme *singulière* θ toute substitution qui multiplie toutes les variables par la même constante θ.

TROISIÈME PARTIE.

CAS DE L'ESPACE RÉGLÉ ORDINAIRE.

CHAPITRE XI.

Conditions J(4, 2).

116°. Soient $n = 4$, $m = 2$, $\binom{n}{m} = 6$. C'est le cas de l'espace ordinaire traité incidemment aux **22°**, **31°**, **39°** ci-dessus.

Renvoyant au Livre de M. Kônigs (*Géométrie réglée et ses applications,* Gauthier-Villars, 1895) pour toutes explications générales sur l'espace réglé ordinaire, aujourd'hui bien connu, je me bornerai à rechercher ce que deviennent les conditions J.

117°. Le problème est le suivant :

Étant donné un senaire A *de déterminant* $|A|$ *égal à* $+1$, *à quelles conditions* J *doit satisfaire* A, *pour que ses trente-six éléments soient précisément les trente-six seconds mineurs d'une matrice quaternaire* a, *de déterminant* $|a|$ *égal à* $+1$.

Autrement dit,

$$A = \Delta_2 a.$$

118°. Occupons-nous d'abord de la condition J_1, c'est-à-dire de l'invariance du système fondamental.

Soit la forme bilinéaire senaire

$$\Omega(p\,;\,p') = p'_{12}p_{34} + p_{12}p'_{34} + p'_{23}p_{14} + p_{23}p'_{14} + p'_{31}p_{24} + p_{31}p'_{24},$$
$$|\Omega| = -1.$$

L'unique relation fondamentale est

$$\omega(p) = \tfrac{1}{2}\Omega(p;p) = p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} = 0.$$

A doit admettre $\omega(p)$ pour invariant.

Je dis que cet invariant est un *invariant absolu*.

Nommons $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ le second mineur de la matrice quaternaire a, obtenu en combinant les lignes d'indices α et β avec les colonnes d'indices γ et δ.

Par l'effet de $A = \Delta_2 a$, ω devient

$$p_{12}p_{34}K + \ldots$$

$$K = \binom{12}{12}\binom{34}{34} + \binom{34}{12}\binom{12}{34} + \binom{23}{12}\binom{14}{34} + \binom{14}{12}\binom{23}{34} + \binom{31}{12}\binom{24}{34} + \binom{24}{12}\binom{31}{34} = |a| = 1.$$

A doit multiplier ω par K; ω est donc un invariant absolu, puisque $K = 1$.

Si, au lieu des coordonnées tétraédriques p_l, dont nous faisons usage, nous prenons les coordonnées de M. Klein (Königs, Chapitre V), l'invariant absolu ω devient une somme de six carrés. En coordonnées de M. Klein, la condition J_1 exprime que la senaire A est orthogonale.

Je dirai, même en conservant les coordonnées tétraédriques et pour ne pas introduire de locution nouvelle, que la senaire A, en vertu de la condition J_1, est orthogonale

119°. Prenons $A = [A_{gl}]$ et une seconde forme bilinéaire senaire $B = [B_{gl}]$, $\{l, g, l', g' = 1, 2, \ldots, 6\}$, les relations

$$B_{g'l'} = \sum_{gl} A_{gg'} B_{gl} A_{ll'}$$

expriment à la fois que l'on a

$$B = A'BA,$$

que A admet pour invariant absolu la forme quadratique senaire $B(p; p)$.

Au lieu de la forme bilinéaire quelconque B, prenons Ω ci-dessus (**118°**), *la condition* J_1 *s'exprime par l'égalité*

$$A'\Omega A = \Omega.$$

120°. Nommons 𝔅 la transformation géométrique de l'espace réglé qui correspond à la collinéation senaire orthogonale *quelconque* B. On sait (Königs, page 126, fin du Paragraphe **88**) que 𝔅 est

ou bien une homographie (collinéation ponctuelle quaternaire effectuée sur les points de l'espace), que nous nommerons opération 𝔅 *de première sorte ;*

ou bien une transformation dualistique (homographie combinée avec une transformation par polaires réciproques), opération 𝔅 de *seconde sorte.*

Les conditions J_2 et J_3 doivent servir à exclure la seconde sorte.

121°. On a par hypothèse d'orthogonalité (**119°**), condition J_1,

$$B'\Omega B = \Omega, \qquad |B|^2 = 1, \qquad |B| = \pm 1.$$

Les 𝔅 de première sorte (homographies) correspondent toutes à des orthogonales B de déterminant égal à $+1$. Je dis que réciproquement toute orthogonale B de déterminant égal à $+1$ conduit à une 𝔅 de première sorte.

Considérons l'orthogonale D, de déterminant égal à -1,

$$D = \begin{vmatrix} p_{12} & p_{34} & p_{23} & p_{14} & p_{31} & p_{24} \\ p_{34} & p_{12} & p_{14} & p_{23} & p_{24} & p_{31} \end{vmatrix}.$$

L'opération correspondante $\mathcal{D}$ est une transformation par polaires réciproques par rapport à la quadrique de base

$$\sum_j x_j^2 = \sum_j u_j^2 = 0, \qquad \{j = 1, 2, 3, 4\}.$$

Il est évident que

les deux opérations $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}\mathcal{D}$ sont toujours de sortes contraires,

les deux déterminants $|B|$ et $|BD|$ sont de signe contraire.

Supposons un instant que, pour une B de déterminant $+1$, l'opération $\mathcal{B}$ soit de deuxième sorte.

L'opération $\mathcal{B}\mathcal{D}$ sera de première sorte, tandis que l déterminant $|BD$ sera égal à -1. Nous savons que cela est absurde. C. Q. F. D.

122°. Les conditions J_2 et J_3 sont ainsi satisfaites par avance; il vient la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Dans l'espace réglé ordinaire, les conditions* J *sont, pour la senaire* A,

$$|A| = 1, \qquad A'\Omega A = \Omega.$$

La forme bilinéaire $\Omega(p; p')$ étant

$$p'_{12}p_{34} + p_{12}p'_{34} + \dots.$$

123°. Étant donnée une senaire orthogonale A, de déterminant $+1$, la construction effective de la matrice quaternaire a, avec $|a| = 1$, telle que $A = \Delta_2 a$, se fera par la méthode des **109°**, **110°**, **111°** ... à **115°**.

La transformation $\mathcal{A}$, correspondante à A, transforme les six arêtes T_{ij}, $\{i, j = 1, 2, 3, 4\}$, du tétraèdre de référence $\mathcal{T}$ en les six arêtes $Q_{ij} = \mathcal{A}[T_{ij}]$ d'un certain tétraèdre Q. Si trois arêtes T forment un trièdre, il en sera de même pour leurs images Q. Les droites Q_{ij} sont

connues, dès que A est connue. Les intersections des Q_{ij} donneront les sommets c_i du tétraèdre Q. Or les trois droites T_{ij}, $T_{ij'}$, $T_{ij''}$ sont les trois arêtes d'un trièdre ayant pour sommet le sommet X_i du tétraèdre de référence. Les trois droites Q_{ij}, $Q_{ij'}$, $Q_{ij''}$ sont issues du sommet c_i de Q, qui correspond à X_i.

On pourra donc construire la matrice quaternaire c du **113°**, avec $|c| = 1$.

124°. Restent à construire les canoniques quaternaires $h = [h_{ij}]$, avec $h_{ij} = 0$ pour $i \neq j$, et la senaire H

$$H = \begin{vmatrix} p_{12} & \dots & H_{12} & p_{12} \\ p_{34} & \dots & H_{34} & p_{34} \\ \vdots & & \vdots & \end{vmatrix} \qquad (\textit{voir } \mathbf{109^\circ} \text{ et } \mathbf{114^\circ}).$$

La senaire $C = \Delta_2 c$ est une orthogonale de déterminant $+1$; il en est de même pour (**114°**) $H = C^{-1} A$. On a donc

$$(0) \qquad 1 = H_{12} H_{34} = H_{23} H_{14} = H_{31} H_{24}$$

et

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} h_1 h_2 = H_{12} \\ h_1 h_3 = H_{13} \\ h_1 h_4 = H_{14} \end{array} \right\},$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} h_2 h_3 = H_{23} \\ h_3 h_4 = H_{34} \\ h_2 h_4 = H_{24} \end{array} \right\}.$$

D'où déjà

$$h_1 h_2 h_3 h_4 = |h| = H_{12} H_{34} = 1,$$

comme cela devait être.

De (1) on tire

$$h_2 = H_{12} h_1^{-1}, \qquad h_3 = H_{13} h_1^{-1}, \qquad h_4 = H_{14} h_1^{-1},$$

36726 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION

DE CET ÉTABLISSEMENT.

IIe SÉRIE. — DIXIÈME CAHIER.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

EXTRAIT DU CATALOGUE

DE LA LIBRAIRIE

GAUTHIER-VILLARS.

DIVISIONS DU CATALOGUE.

I. — OUVRAGES SUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

ABRAHAM (Henri), Maître de conférences à l'École Normale supérieure, Secrétaire général de la Société française de Physique. — **Recueil d'expériences élémentaires de Physique**, publié avec la collaboration de nombreux physiciens. Deux volumes in-8° (22,5 × 14).

Ire Partie : *Travaux d'atelier. Géométrie et Mécanique. Hydrostatique. Chaleur.* Vol. de XII-247 pages avec 260 figures; 1904.
Broché.... 3 fr. 75 c. | Cartonné toile.... 5 fr.

IIe Partie : *Acoustique, Optique. Électricité et Magnétisme.* Vol. de XII-454 pages avec 424 figures; 1904.
Broché.... 6 fr. 25 c. | Cartonné.... 7 fr. 50 c.

ANDOYER (H.), Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris. — **Leçons sur la Théorie des Formes et la Géométrie analytique supérieure**, *à l'usage des étudiants des Facultés des Sciences.* Volume de VI-508 p.; 1900. 15 fr.

ANDRÉ (Ch.), Directeur de l'Observatoire de Lyon, Professeur d'Astronomie à l'Université de Lyon. — **Traité d'Astronomie stellaire.** 2 vol. grand in-8 se vendant séparément :

Ire Partie : *Étoiles simples.* Avec 29 figures et 2 planches; 1899. 9 fr.

IIe Partie : *Étoiles doubles et multiples, amas stellaires.* Avec 74 figures et 3 planches; 1900. 14 fr.

ANDRÉ (Désiré), ancien Élève de l'École Normale supérieure. — **Liste et Résumé de mes principaux travaux mathématiques.** Grand in-8 (25 × 16) de 106 pages; 1904. 4 fr.

ANGOT (A.). — **Instructions météorologiques.** 4e édition, entièrement refondue. Gr. in-8, avec figures et 4 planches, suivi de nombreuses Tables pour la réduction des observations; 1903. 4 fr. 50 c.

ANGOT (Alfred). — **Abrégé des Instructions météorologiques.** In-8, avec figures; 1903. 1 fr. 50 c.

APPELL (P.), Membre de l'Institut, et **CHAPPUIS (J.)**, Professeur à l'École Centrale. — **Leçons de Mécanique élémentaire**, conformes aux programmes du 31 mai 1902. 2 volumes in-18 jésus se vendant séparément.

I. *Volume à l'usage des élèves de la classe de Première C et D* avec 76 figures; 1903. 2 fr. 75 c.

II. *Volume à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques* A et B, avec 103 fig.; 1905. 4 fr.

APPELL (P.), Membre de l'Institut. — **Cours de Mécanique à l'usage des Élèves de la classe de Mathématiques spéciales**, conforme au programme du 27 juillet 1904. In-8, avec 185 figures. 2e édition; 1905. 12 fr.

APPELL (Paul), Membre de l'Institut. — **Traité de Mécanique rationnelle** (Cours de Mécanique de la Faculté des Sciences). 3 volumes grand in-8, se vendant séparément.

Tome I. — *Statique. Dynamique du point.* 2e édition entièrement refondue. Avec 178 figures; 1902. 18 fr.

Tome II. — *Dynamique des systèmes. Mécanique analytique.* 2e édition entièrement refondue, avec 99 figures; 1904. 16 fr.

Tome III. — *Équilibre et mouvement des milieux continus.* Avec 70 figures; 1902. 17 fr.

APPELL (P.). — **Éléments d'Analyse mathématique,** *à l'usage des ingénieurs et des physiciens.* (Cours professé à l'École centrale des Arts et Manufactures). 2ᵉ édition. Grand in-8 (25 × 16) de VII-714 p., avec 29 fig., cartonné à l'anglaise; 1905. 24 fr.

ARMAGNAT (H.), Chef du bureau des mesures électriques aux ateliers Carpentier. — **Instruments et méthodes de mesures électriques industrielles.** 2ᵉ édition revue et complétée. In-8 (23 × 14) de 614 p., avec 228 fig., cartonné à l'anglaise (*B. T.*); 1902. 15 fr.

ARMAGNAT (H.). — **La Bobine d'induction.** In-8 (23 × 14) de VI-223 p., avec 109 fig., cart.; 1905. 5 fr.

ATLAS PHOTOGRAPHIQUE DE LA LUNE, publié par **l'Observatoire de Paris,** exécuté par MM. LOEWY, Directeur de l'Observatoire, et P. PUISEUX, Astronome adjoint à l'Observatoire. 8 fascicules 1896-1897-1898-1899-1900-1902-1903-1904.

Chaque fascicule comprend un volume in-4° de 40 à 60 p. et un Atlas de 6 ou 7 pl. in-folio (64 × 80). Prix de chaque fascicule. 30 fr.

AUERBACH (Dʳ Félix), Professeur à l'Université d'Iéna. — **La Dominatrice du Monde et son ombre.** *Conférence sur l'énergie et l'entropie.* Édition française publiée avec l'assentiment de l'auteur par le Dʳ E. ROBERT-TISSOT, médecin à La Chaux-de-Fonds (Suisse). Préface de CH.-ED. GUILLAUME, Directeur adjoint du Bureau international des Poids et mesures. In-16 (19 × 12) de XV-86 pages; 1905. 2 fr. 75 c.

BAILLAUD (B.), Doyen de la Faculté des Sciences de Toulouse, Directeur de l'Observatoire. — **Cours d'Astronomie** *à l'usage des étudiants des Facultés des Sciences.* 2 volumes grand in-8, se vendant séparément.

Iʳᵉ PARTIE : *Quelques théories applicables à l'étude des Sciences expérimentales. Probabilités : erreurs des observations. Instruments d'Optique. Instruments d'Astronomie. Calculs numériques, interpolations,* avec 58 figures; 1893. 8 fr.

IIᵉ PARTIE : *Astronomie sphérique. Mouvements dans le système solaire. Éléments géographiques. Éclipses. Astronomie moderne,* avec 72 figures; 1896. 15 fr.

BARBARIN (P.), Professeur de Mathématiques supérieures au lycée de Bordeaux. — **Géométrie non euclidienne.** 1 vol. in-8 écu (20 × 13) de 80 pages, avec 19 figures et 3 planches hors texte, cartonné (*C. S.*); 1902. 2 fr.

BERTHELOT (M.), Sénateur, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur au Collège de France. — **Les carbures d'hydrogène (1851-1901).** *Recherches expérimentales.* Trois volumes grand in-8; 1901, se vendant ensemble. 45 fr.

BERTHELOT (M.). — **Thermochimie.** *Données et Lois numériques.*

TOME I : *Les Lois numériques,* XVII-737 pages. — TOME II : *Les Données expérimentales,* 878 pages. 2 beaux volumes grand in-8; 1897. 50 fr.

BERTHELOT, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. — **Traité pratique de Calorimétrie chimique.** 2ᵉ édition, revue, corrigée et augmentée. Vol. in-8 (23 × 14) de XIII-317 p., avec 27 fig; 1905. 6 fr.

BESSON (Paul), Ingénieur des Arts et Manufactures. — **Le Radium et la Radioactivité.** *Propriétés générales. Emplois médicaux.* In-16 (19 × 12) de IV-170 pages environ, avec 23 figures; 1904. 2 fr. 75 c.

BIGOURDAN (G.). — **Les éclipses de Soleil.** *Instructions sommaires sur les observations que l'on peut faire pendant ces éclipses et particulièrement pendant l'éclipse totale du 30 août 1905.* Un volume in-8 (23 × 14) de 167 pages, avec 40 figures; 1905. 3 fr. 50 c.

BLONDLOT (R.), Correspondant de l'Institut, Professeur à l'Université de Nancy. — **Rayons « N ».** Recueil des Communications faites à l'Académie des Sciences avec des *Notes complémentaires* et avec Instruction pour la confection des écrans phosphorescents. In-16 (19 × 12) de VI-78 pages, avec figures, 1 planche et 1 écran phosphorescent; 1904. 2 fr.

BOLTZMANN (L.), Professeur à l'Université de Leipzig. — **Leçons sur la théorie des gaz,** avec une *Introduction* et des *Notes* de M. Brillouin, Professeur au Collège de France. 2 volumes grand in-8.

Iʳᵉ PARTIE, traduite par *A. Gallotti,* ancien Élève de l'École Normale supérieure, Professeur au Lycée d'Orléans, avec figures; 1902. 8 fr.

IIᵉ PARTIE, traduite par *A. Gallotti* et *H. Bénard,* anciens Élèves de l'École Normale, avec figures; 1904. 10 fr.

BOREL (Émile), Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — **Collection de monographies sur la Théorie des fonctions,** publiée sous la direction de M. E. BOREL. Volumes grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément.

Leçons sur la théorie des fonctions (Éléments de la théorie des ensembles et applications), par EMILE BOREL; 1898. 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions entières, par E. BOREL; 1900. 3 fr. 50 c.

Leçons sur les séries divergentes, par E. BOREL; 1901. 4 fr. 50 c.

Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France, par E. BOREL, recueillies et rédigées par ROBERT D'ADHÉMAR; 1902. 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions méromorphes, professées au Collège de France, par E. BOREL, recueillies et rédigées par LUDOVIC ZORETTI; 1903. 3 fr. 50 c.

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France, par HENRI LEBESGUE, 1904. 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions de variables réelles et leur représentation par des séries de polynomes, professées à l'École Normale supérieure par EMILE BOREL et rédigées par MAURICE FRÉCHET, avec des Notes de PAUL PAINLEVÉ et HENRI LEBESGUE. Volume de VIII-160 p., avec 8 figures; 1905. 4 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France, par RENÉ BAIRE, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier, et rédigées par *A. Denjoy,* Élève de l'École Normale supérieure. Volume de VIII-128 pages; 1905. 3 fr. 50 c.

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par M. ERNST LINDELÖF; 1905. 3 fr. 50 c.

Sur l'inversion des intégrales définies, par M. VITO VOLTERRA.

BOUSSINESQ (J.), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Théorie analytique de la chaleur,** mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la Théorie mécanique de la Lumière. (COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) Deux volumes grand in-8 se vendant séparément.

TOME I : *Problèmes généraux.* Volume de XXVII-333 pages avec 14 figures; 1901. 10 fr.

TOME II : *Refroidissement et échauffement par rayonnement. Conductibilité des tiges, lames et masses cristallines. Courants de convection. Théorie mécanique de la lumière.* Volume de XXXII-625 pages; 1903. 18 fr.

BOUTY (E.), Professeur à la Faculté des Sciences. — **Chaleur, Acoustique et Optique.** Premier Supplément au *Cours de Physique de l'École Polytechnique,* par JAMIN et BOUTY. In-8, avec 41 figures; 1896. 3 fr. 50 c.

— **Progrès de l'Électricité, Oscillations hertziennes, Rayons cathodiques et Rayons X.** Deuxième Supplément au *Cours de Physique* de l'École Polytechnique, par Jamin et Bouty. In-8 avec 45 figures et 2 planches; 1899. 3 fr. 50 c.

BROCA (André), Professeur agrégé de Physique à la Faculté de Médecine. — **La télégraphie sans fil.** 2e édition entièrement refondue. In-18 jésus avec 52 figures; 1904. 4 fr.

CAHEN (E.), ancien Élève de l'École Normale supérieure, Professeur de Mathématiques spéciales au Collège Rollin. — **Éléments de la théorie des nombres.** *Congruences. Formes quadratiques. Nombres incommensurables. Questions diverses.* Grand in-8; 1900. 12 fr.

CARTE de l'éclipse totale de Soleil des 29-30 août 1905. *Lieu des points d'où l'on peut en observer les phases.* Carte dressée sous la direction du Bureau des Longitudes; de format (110 × 103) pliée sous couverture (25 × 16); 1905. 2 fr. 50 c.

CASPARI (E.), Ingénieur hydrographe de la Marine. — **Cours d'Astronomie pratique. Application à la Géographie et à la Navigation.** 2 beaux volumes grand in-8, se vendant séparément. (*Ouvrage couronné par l'Académie des Sciences.*)

Ire Partie : *Coordonnées vraies et apparentes. Théorie des instruments*, avec figures; 1888. 9 fr.

IIe Partie : *Détermination des éléments géographiques. Applications pratiques*, avec fig. et 1 pl.; 1889. 9 fr.

CATALOGUE INTERNATIONAL DE LA LITTÉRATURE SCIENTIFIQUE, publié par une Commission internationale sous la direction de M. le Dr **H. Forster Morley.** 1re année, 17 volumes en 21 fascicules. Prix des 17 volumes ensemble. 450 fr.

Chaque fascicule se vend séparément.

	fr
A. Mathématiques.	18,75
B. Mécanique.	13,10
C. Physique I.	26,25
» II.	18,75
D. Chimie I.	26,25
» II.	22,50
E. Astronomie.	26,25
F. Météorologie.	18,75
G. Minéralogie.	18,75
H. Géologie.	18,75
J. Géographie.	18,75
K. Paléontologie.	13,10
L. Biologie générale.	13,10
M. Botanique I.	26,25
» II.	22,50
N. Zoologie.	47 »
O. Anatomie humaine.	13,10
P. Anthropologie physique.	13,10
Q. Physiologie I.	26,25
» II.	22,50
R. Bactériologie.	26,25

Deuxième année, formant 17 volumes. Prix des 17 volumes ensemble. 450 fr.

Chaque fascicule se vend séparément.

	fr
A. Mathématiques.	18,75
B. Mécanique.	13,10
C. Physique.	30 »
D. Chimie.	46,25
E. Astronomie.	26,25
F. Météorologie.	18,75
G. Minéralogie.	20,65
H. Géologie.	20,65
J. Géographie.	20,65
K. Paléontologie.	13,10
L. Biologie générale.	13,10
M. Botanique.	46,25
N. Zoolog.	48,75
O. Anatomie humaine.	18,75
P. Anthropologie physique.	18,75
Q. Physiologie.	48,75
R. Bactériologie.	26,25

La troisième année, formant 17 volumes, est en cours de publication.

Les volumes suivants ont paru :

	fr
A. Mathématiques.	18,75
B. Mécanique.	13,10
C. Physique.	30 »
R. Bactériologie.	26,25

CHAPPUIS (J.) et **BERGET (A.)**. — **Cours de Physique** *à l'usage des Candidats aux Écoles spéciales* (conforme aux derniers programmes). Un beau volume grand in-8 (25 × 16) de IV-697 pages avec 465 figures; 1898.
Broché........... 14 fr. | Relié (cuir souple). 17 fr.

CHIPART (H.), Ingénieur des Mines. — **La Théorie gyrostatique de la lumière.** Grand in-8 de 192 pages; 1904. 6 fr. 50 c.

CONGRÈS INTERNATIONAL DE CHRONOMÉTRIE, Exposition universelle de 1900. — **Comptes rendus des Travaux, Procès-verbaux, Rapports et Mémoires** publiés sous les auspices du Bureau du Congrès, par L. Fichot et P. de Vanssay, Secrétaires. In-4 avec fig.; 1902. 15 fr.

COMBEROUSSE (Charles de), Ingénieur, Professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures et au Conservatoire des Arts et Métiers, ancien Professeur de Mathématiques spéciales au collège Chaptal. — **Cours de Mathématiques à l'usage des Candidats à l'École Polytechnique, à l'École Normale supérieure et à l'École centrale des Arts et Manufactures. 4 vol. in-8, avec fig. et planches.**

Chaque Volume se vend séparément:

Tome Ier : *Arithmétique* et *Algèbre élémentaire* (avec 38 figures). 4e édition; 1900. 10 fr.

On vend à part :

Arithmétique.	4 fr.
Algèbre élémentaire.	6 fr.

Tome II : *Géométrie élémentaire, plane et dans l'espace; Trigonométrie rectiligne et sphérique*, avec 543 fig. 3e édition; 1893. 13 fr.

On vend à part :

Géométrie élémentaire plane et dans l'espace.	8 fr.
Trigonométrie rectiligne et sphérique, suivie de Tables des valeurs des lignes trigonométriques naturelles.	5 fr.

Tome III : *Algèbre supérieure.* Ire Partie : *Compléments d'Algèbre élémentaire* (*Déterminants, fractions continues*, etc.). — *Combinaisons.* — *Séries.* — *Étude des Fonctions.* — *Dérivées et Différentielles.* — *Premiers principes du Calcul intégral.* 3e édition (XXI-768 pages), avec 20 figures; 1904. 15 fr.

Tome IV : *Algèbre supérieure.* IIe Partie : *Étude des imaginaires. Théorie générale des équations.* 2e édition (XXXIV-831 pages), avec 63 figures; 1890. 15 fr.

CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS (Exposition universelle de 1900). — **Rapports présentés au Congrès international des Mathématiciens**, réuni à Paris en 1900, rassemblés et publiés par E. Duporcq, Secrétaire général. Grand in-8; 1902. 16 fr.

CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHYSIQUE, Exposition universelle de 1900. — **Travaux du Congrès international de Physique**, réuni à Paris en 1900, sous les auspices de la Société française de Physique, rassemblés et publiés par Ch.-Ed. Guillaume et L. Poincaré, Secrétaires généraux du Congrès. 4 volumes gr. in-8, avec fig.
Tomes I, II et III : *Rapports présentés au Congrès*; 1900. Les 3 volumes ensemble. 50 fr.

On vend séparément :

TOME I : *Questions générales. Métrologie. Physique mécanique. Physique moléculaire;* 1900. 18 fr.

TOME II : *Optique. Électricité. Magnétisme;* 1900. 18 fr.

TOME III : *Électro-optique et Ionisation. Applications. Physique cosmique. Physique biologique;* 1900. 18 fr.

TOME IV : *Procès-verbaux. Annexe. Liste des Membres;* 1901. 6 fr.

CONSTAN (P.), ancien Élève de l'École Navale. Ex-Enseigne de vaisseau, Professeur d'Hydrographie de la marine. — **Cours élémentaire d'Astronomie et de Navigation**, *à l'usage des Capitaines au long cours et des Élèves des Écoles d'Hydrographie.* 2 volumes grand in-8 (25 × 16) avec nombreuses figures se vendant séparément. (*Ouvrage en harmonie avec les derniers programmes des examens pour les brevets de Capitaine au long cours.*)

TOME I : *Astronomie.* Vol. de IV-215 p. avec 138 fig.; 1903. 7 fr. 50 c.

TOME II. *Navigation.* Vol. de IV-300 p. avec 159 fig. et 3 planches; 1904. 8 fr. 50 c.

CORNU (A.), Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes. — **Notices sur l'Électricité.** *Électricité statique et dynamique. Production et transport de l'énergie électrique;* avec une Préface de A. POTIER, Membre de l'Institut. (Notices extraites de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes.*) In-16 (19 × 22), avec fig.; 1904. 5 fr.

COUTURAT (Louis). — L'Algèbre de la Logique. (*Collection Scientia :* Série physico-mathématique.) In-8 écu (20 × 13) de 100 p., cartonné; 1905. 2 fr.

CURIE (Mme S.). — Recherches sur les substances radioactives. 2e édition. Grand in-8 (25 × 16) de 105 pages, avec 14 figures; 1904. 5 fr.

DA CUNHA (A.), Ingénieur des Arts et Manufactures. — **L'année technique (1903-1904).** *Locomotion et moyens de transport. Applications de la Physique expérimentale. Travaux publics et Architecture. Éclairage et chauffage. Physiologie et Hygiène;* avec une Préface de H. MOISSAN, Membre de l'Institut. Grand in-8 (28 × 18) de VIII-303 pages avec 142 figures; 1904. 3 fr. 50 c.

— Les années précédentes se vendent chacune 3 fr. 50 c.

DARBOUX (G.), Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences. — **Leçons sur la Théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal.** 4 vol. gr. in-8, av. fig., se vendant séparément.

Ire PARTIE : *Généralités. — Coordonnées curvilignes. — Surfaces minima;* 1887. 15 fr.

IIe PARTIE : *Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles. — Des lignes tracées sur les surfaces;* 1889. 15 fr.

IIIe PARTIE : *Lignes géodésiques et courbure géodésique. — Paramètres différentiels. — Déformation des surfaces;* 1894. 15 fr.

IVe et dernière PARTIE : *Déformation infiniment petite et représentation sphérique;* 1896. 15 fr.

DARBOUX (G.). — Étude sur le développement des méthodes géométriques. Lue le 24 septembre 1904, au Congrès des Sciences et des Arts, à Saint-Louis. Brochure in-8 (25 × 16) de 28 pages; 1905. 1 fr. 50 c.

DUCROT (André), Ancien Élève de l'École Polytechnique. — **Presses modernes typographiques.** In-4 (28 × 23) de 162 p., avec 141 fig.; 1904. 7 fr. 50 c.

DUHEM (Pierre), Correspondant de l'Institut de France, Professeur de Physique théorique à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — **Recherches sur l'Hydrodynamique.** Deux volumes in-4 se vendant séparément.

Ire SÉRIE : *Principes fondamentaux de l'hydrodynamique. Propagation des discontinuités, des ondes, des quasi-ondes,* avec 18 figures; 1903. 10 fr.

IIe SÉRIE : *Les conditions aux limites. Le théorème de Lagrange et la viscosité. Les coefficients de viscosité et la viscosité au voisinage de l'état critique;* avec figures; 1904. 7 fr. 50 c.

DUPORCQ (Ernest), Ancien Élève de l'École Polytechnique, Ingénieur des Télégraphes. — **Premiers principes de Géométrie moderne,** *à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales et des candidats à la Licence et à l'Agrégation.* In-8 avec figures; 1899. 3 fr.

ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, publiée sous les auspices des Académies des Sciences de MUNICH, de VIENNE, de LEIPZIG et de GÖTTINGUE. Édition française, publiée d'après l'édition allemande, sous la direction de JULES MOLK, Professeur à l'Université de Nancy, avec le concours de nombreux savants et professeurs français.

L'édition française de l'*Encyclopédie* est publiée en 7 tomes formant chacun 3 ou 4 volumes de 200 à 300 pages grand in-8, qui paraissent en fascicules de 10 feuilles environ.

Le prix de chaque fascicule sera d'environ 5 fr.

Le premier fascicule du Tome I a paru; prix : 5 fr.

(*Demander le prospectus spécial.*)

FISHER (H.-K.-C.) et **DARBY (J.-C.-H.). Manuel élémentaire pratique de mesures électriques sur les câbles sous-marins.** Traduit de l'anglais sur la 2e édition, par LÉON HUSSON. In-8 avec 65 figures; 1903. 5 fr.

FLAMMARION (Camille). — La planète Mars et ses conditions d'habitabilité. *Synthèse générale de toutes les observations.* Climatologie, météorologie, aréographie, continents, mers et rivages, eaux et neiges, saisons, variations observées. Grand in-8 jésus, avec 580 dessins télescopiques et 23 cartes; 1892.

Broché. 12 fr. | Cartonné avec luxe. 15 fr.

FOUET, Professeur à l'Institut catholique. — **Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques.** 2 volumes grand in-8 se vendant séparément.

Ire PARTIE. *Les fonctions analytiques en général : leurs modes de définition et de représentation.* Volume de 330 pages, avec 35 fig.; 1904......... 7 fr. 50 c.

IIe PARTIE. *Théorèmes d'existence. Les fonctions analytiques au point de vue de Cauchy, de Weierstrass, de Riemann.* Volume de 300 pages; 1904......... 10 fr.

FORCRAND (R. de), Correspondant de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences, Directeur de l'Institut de Chimie de l'Université de Montpellier. — **Cours de Chimie** *à l'usage des étudiants du P. C. N.* Deux volumes in-8 (23 × 14) se vendant séparément.

Tome I : *Généralités. Chimie minérale.* Volume de VI-325 pages avec 16 figures; 1905. 5 fr.

Tome II : *Chimie organique. Chimie analytique.* Volume de IV-317 p. avec 3 fig.; 1905. 5 fr.

FRENET (F.), Professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Lyon. — **Recueil d'Exercices sur le Calcul infinitésimal.** Ouvrage destiné aux Candidats à l'École Polytechnique et à l'École Normale et à la licence. 6e édition, augmentée d'un *Appendice sur les résidus, les fonctions elliptiques, les équations aux dérivées partielles, les équations aux différentielles totales,* par H. LAURENT, Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. In-8, avec figures; 1904. 8 fr.

FREYCINET (Charles de), de l'Institut. — **Essais sur la Philosophie des Sciences.** *Analyse. Mécanique.* 2e éd., in-8; 1900. 6 fr.

FREYCINET (Ch. de). — Sur les principes de la Mécanique rationnelle. In-8; 1902. 4 fr.

FREYCINET (Ch. de). — De l'expérience en Géométrie. Volume in-8; 1903. 4 fr.

GARÇON (Jules), Ingénieur Chimiste. — **Répertoire général ou Dictionnaire méthodique de Bibliographie des Industries tinctoriales et des Industries annexes,** *depuis les origines jusqu'à la fin de l'année* 1896. (*Technologie et Chimie.*) Ouvrage honoré du grand prix décennal Daniel Dollfus de la Société industrielle de Mulhouse. 2 volumes grand in-8, 1638 p., plus un volume de Tables. Prix de l'Ouvrage complet 100 fr.

Tome I : *Introduction et Avertissement général. Notice sur les sources bibliographiques du Dictionnaire. Tables.*

Tome II : Dictionnaire : Depuis *Accidents de fabrication* jusqu'à *Kermès.*

Tome III : Dictionnaire : Depuis *Laboratoires* jusqu'à la fin.

GAUTIER (Henri), et CHARPY (Georges), anciens élèves de l'École Polytechnique, Docteurs ès Sciences. — **Leçons de Chimie,** *à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales.* 4ᵉ édition, entièrement refondue, conforme au programme du 27 juillet 1904. Gr. in-8, avec 96 fig.; 1905.
Broché.......... 10 fr. | Relié (cuir souple). 13 fr.

GERARD (Eric), Directeur de l'Institut électrotechnique Montefiore. — **Leçons sur l'Electricité,** professées à l'Institut électrotechnique Montefiore, annexé à l'Université de Liége. 7ᵉ édition refondue et complétée. 2 vol. grand in-8, se vendant séparément :

TOME I : *Théorie de l'électricité et du magnétisme. Électrométrie. Théorie et construction des générateurs et des transformateurs électriques,* avec 400 figures; 1904. 12 fr.

TOME II : *Canalisation et distribution de l'énergie électrique. Applications de l'électricité à la Télégraphie, à la Téléphonie, à la production et à la transmission de la puissance motrice, à la Traction, à l'Éclairage, à la Métallurgie et à la Chimie industrielle,* avec 432 figures; 1905. 12 fr.

GERARD (Eric). — Mesures électriques. Leçons professées à l'Institut électrotechnique Montefiore, annexé à l'Université de Liége. 2ᵉ édition. Gr. in-8 de 532 p., avec 217 figures. Cartonné, toile anglaise; 1901. 12 fr.

GHERSI (J.) — Formulaire industriel. Procédés utiles dans les arts, les métiers et l'industrie. Couleurs, vernis, mastics, colles, encres, caoutchouc, matières textiles, papier, bois, feux d'artifice, verre, etc. Electricité. In-8 couronne (18 × 12) de 514 pages avec 3 planches; 1901.
Broché....... 3 fr. 50 c. | Cartonné à l'anglaise 5 fr.

GIBBS (J.-W.), Professeur au Collège Yale, à Newhaven. — **Diagrammes et surfaces thermodynamiques.** Traduction de M. G. Roy, Chef de travaux de Physique à l'Université de Dijon, avec une Introduction de M. B. Brunhes, Professeur à l'Université de Clermont. In-8 écu de 86 p. avec fig., cartonné (*C. S.*); 1903. 2 fr.

GIRARD (Aimé). — Recherches sur la culture de la pomme de terre industrielle. 2ᵉ édition. Nouveau tirage contenant les derniers résultats obtenus. Un volume grand in-8, avec figures et un atlas cartonné de 6 belles planches en héliogravure; 1900. 10 fr.

On vend séparément :

Texte......... 5 fr. | Atlas....... 5 fr.

GOURSAT (E.), Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours d'Analyse** *de la Faculté des Sciences de Paris.* 2 volumes grand in-8.

TOME I : *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en série. Applications géométriques.* Volume de VI-620 p., avec 52 figures; 1902. 20 fr.

TOME II : *Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Eléments de calcul des variations.* Volume de VI-640 p., avec 95 figures. 20 fr.

GRANGER (Albert), Professeur de Chimie et de Technologie céramique à l'Ecole d'application de la manufacture nationale de Sèvres. — **La Céramique industrielle.** *Chimie-Technologie.* In-8 (23 × 14) de 626 p., avec 179 figures; 1905.

GRIMSHAW (Robert), M. E. — **L'atelier moderne de constructions mécaniques. Procédés mécaniques spéciaux et tours de main** (1ʳᵉ SÉRIE). Traduit de l'anglais par A. LAITUGA. In-8 (23 × 14) de 394 pages avec 222 figures; 1903...................... 10 fr.

GUICHARD (C.), Correspondant de l'Institut, Professeur à l'Université de Clermont-Ferrand. — **Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmes triple-orthogonaux** (*Collection Scientia,* Série physico-mathematique). In-8 écu (20 × 13) de 95 pages, avec 4 figures, cartonné. 2 fr.

GUILBERT (C.-F.), Ingénieur-électricien. — **Les générateurs d'électricité à l'Exposition de 1900.** In-8 jésus (28 × 19) de VI-766 pages, avec 615 figures et 10 tableaux hors texte; 1902. (Ouvrage couronné par l'Académie des Sciences, prix Hébert; 1902.) 30 fr.

GUILLAUME (Ch.-Ed.), Les applications des aciers au nickel, avec un Appendice sur la *Théorie des aciers au nickel.* In-8, avec 25 figures; 1904. 3 fr. 50 c.

— **Recherches sur le nickel et ses alliages.** In-8; 1898. 1 fr. 75 c.

Les deux volumes se vendent ensemble 5 fr.

GUILLAUME (Jacques), Ingénieur des Arts et Manufactures. — **Notions d'électricité.** *Son utilisation dans l'industrie, d'après les cours faits à la Fédération nationale des chauffeurs, conducteurs, mécaniciens, automobilistes de toutes les industries.* In-8 (23 × 14) de IX-351 p., avec 154 fig.; 1905. 7 fr. 50 c.

HALLER (Albin), Membre de l'Institut. — **Les industries chimiques et pharmaceutiques.** 2 volumes gr. in-8, avec 108 fig.; 1903, se vendant ensemble. 20 fr.

HART (G.). — Les turbines à vapeur. Grand in-8 (25 × 16) avec 53 fig. et 1 pl.; 1904. 4 fr.

HERMITE. — Correspondance d'Hermite et Stieltjes, publiée par les soins de B. BAILLAUD, Directeur de l'Observatoire de Toulouse, et H. BOURGET, Maître de Conférences à l'Université, avec une *Préface* de E. PICARD, Membre de l'Institut. 2 vol. gr. in-8 (25 × 16) se vendant separément.

TOME I (8 novembre 1882-22 juillet 1889). Volume de XX-477 pages avec 2 portraits; 1904. 16 fr.

TOME II (18 octobre 1889-15 décembre 1894). Volume de VI-457 pages avec 1 portrait; 1905. 16 fr.

HERMITE. — Œuvres de Charles Hermite, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par ÉMILE PICARD, Membre de l'Institut. Volumes gr. in-8 (25 × 16) se vendant séparément.

TOME I. Volume de XL-500 pages avec un portrait d'Hermite; 1905. 18 fr.

TOMES II et III. (*En préparation.*)

HOÜEL (J.). — Tables de Logarithmes à cinq décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques, suivies des **Logarithmes d'addition et de soustraction ou Logarithmes de Gauss et de diverses Tables usuelles.** Nouvelle éd., revue et augm. Grand in-8; 1903. (*Autorisé par décision ministérielle.*)

Broché. 2 fr. | Cartonné. 2 fr. 75 c.

HUMBERT (G.), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. — **Cours d'analyse** *professé à l'École Polytechnique;* 2 volumes grand in-8.

Tome I : *Calcul différentiel. Principes du calcul intégral. Applications géométriques;* avec 111 figures, 1902. 16 fr.

Tome II : *Complément de la théorie des intégrales définies. Fonctions eulériennes. Fonctions d'une variable imaginaire. Fonctions elliptiques et applications d'équations différentielles;* avec 91 figures. 1904. 16 fr.

INSTITUT DE FRANCE. — *Voir au Catalogue général :* **Mémoires de l'Académie des Sciences. — Tables générales des Travaux contenus dans les Mémoires de l'Académie des Sciences. — Recueil de Mémoires. — Rapports et Documents relatifs à l'observation du passage de Vénus sur le Soleil, en 1874. — Mémoires relatifs à la nouvelle maladie de la vigne. — Mission du Cap Horn.**

INSTRUCTION SUR LES PARATONNERRES, adoptée par l'Académie des Sciences; Nouvelle édition complétée. In-16 (19×12), avec 58 figures et 1 pl.; 1904. 3 fr.

JAMIN (J.), Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur de Physique à l'École Polytechnique, et **BOUTY (E.)**, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours de Physique de l'École Polytechnique.** 4e édition, augmentée et entièrement refondue par E. Bouty. 4 forts vol. in-8 de plus de 4000 pages, avec 1587 figures et 14 planches sur acier, dont 2 en couleur; 1885-1891. (*Autorisé par décision ministérielle.*) Ouvrage complet. (Demander le prospectus détaillé et la Table générale des matières.) 72 fr.

JANET (Paul), Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, Directeur de l'École supérieure d'Électricité. — **Leçons d'Électrotechnique générale** professées à l'École supérieure d'Électricité. 2e édition, revue et augmentée. Trois volumes, grand in-8 (25×16) avec nombreuses figures.

Tome I : *Généralités. Courants continus.* Volume de XII-369 pages, avec 166 figures; 1904. 11 fr.

Tome II : *Courants alternatifs sinusoïdaux et non sinusoïdaux. Alternateurs. Transformateurs.* Volume de 309 pages, avec 156 figures; 1905. 11 fr.

Tome III : *Moteurs à courants alternatifs. Couplage des alternateurs. Transmission par courants alternatifs. Compoundage des alternateurs. Transformateurs polymorphiques.*

JANET (Paul). — **Premiers principes d'Électricité industrielle.** *Piles. Accumulateurs. Dynamos. Transformateurs.* 5e édition revue et corrigée. In-8, avec 169 fig.; 1903. 6 fr.

JANET (Paul), Director de la escuela superior de electricidad de Paris. — **Primeros principios de Electricidad industrial.** Traducida del francés por Balbino Vasquez. In-8 avec 169 fig. (édit. espagnole); 1904. 6 fr.

JANET (Paul). — **Primeiros principios de Electricidade industrial.** Traducçao brazileira por J. Jorge da Fonseca. In-8, 169 fig. (édit. portugaise); 1904. 6 fr.

JORDAN (Camille), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. — **Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.** 2e édition, entièrement refondue. 3 volumes in-8, avec figures, se vendant séparément.

Tome I. — Calcul différentiel; 1893. 17 fr.

Tome II. — Calcul intégral (*Intégrales définies et indéfinies*); 1894. 17 fr.

Tome III. — Calcul intégral (*Équations différentielles*); 1896. 15 fr.

JOUFFRET (G.), ancien Élève de l'École Polytechnique, Membre de la Société mathématique de France. — **Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions.** *Introduction à la géométrie à n dimensions.* Grand in-8, de XXXIX-213 pages avec 65 figures; 1903. 7 fr. 50 c.

LALANDE. — **Tables de Logarithmes pour les Nombres et les Sinus à CINQ DÉCIMALES;** revues par le baron *Reynaud.* Nouvelle édition, augmentée de *Formules pour la Résolution des Triangles,* par *Bailleul,* typographe. In-18; 1903. (*Autorisé par décision du Ministre de l'Instruction publique.*)

Broché. 2 fr. | Cartonné. 2 fr. 40 c.

LALANDE. — **Tables de Logarithmes, étendues à SEPT DÉCIMALES,** par *Marie,* précédées d'une Instruction par le baron *Reynaud.* Nouvelle édition, augmentée de *Formules pour la Résolution des Triangles,* par *Bailleul,* typographe. In-12; 1903.

Broché. 3 fr. 50 c. | Cartonné. 3 fr. 90 c.

LAURENT (H.), Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — **Traité d'Analyse.** 7 volumes in-8, avec figures. 73 fr.

Tome I : **Calcul différentiel.** *Applications analytiques et géométriques;* 1885. 10 fr.

Tome II : *Applications géométriques;* 1887. 12 fr.

Tome III : **Calcul intégral.** *Intégrales définies et indéfinies;* 1888. 12 fr.

Tome IV : *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales;* 1889. 12 fr.

Tome V : *Équations différentielles ordinaires;* 1890. 10 fr.

Tome VI : *Équations aux dérivées partielles;* 1890. 8 fr. 50 c.

Tome VII et dernier : *Applications géométriques de la théorie des équations différentielles;* 1891. 8 fr. 50 c.

LAURENT (H.). — **Traité d'Algèbre,** à l'usage des Candidats aux Écoles du Gouvernement. Revu et mis en harmonie avec les derniers Programmes, par J.-H. Marchand, ancien Élève de l'École Polytechnique. 4 vol. in-8, se vendant séparément.

Ire Partie : Algèbre élémentaire, à l'usage des *Classes de Mathématiques élémentaires.* 5e éd.; 1897. 4 fr.

IIe Partie : Analyse algébrique, à l'usage des *Classes de Mathématiques spéciales.* 5e édition; 1894. 4 fr.

IIIe Partie : Théorie des équations, à l'usage des *Classes de Mathématiques spéciales.* 5e édition; 1894. 4 fr.

IVe Partie : Compléments. — Théorie des polynomes à plusieurs variables; 1894. 1 fr. 50 c.

LEBESGUE (Henri), Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Rennes. — **Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives** professées au Collège de France. Grand in-8 avec figures; 1904. 3 fr. 50 c.

LE BLANC (Max), Directeur de l'Institut électrochimique de l'École supérieure technique de Carlsruhe. — **Traité d'Électrochimie**, traduit avec l'autorisation de l'auteur, sur la 3e édition allemande, par C. Marie, Préparateur d'Électrochimie à la Faculté des Sciences (Institut de Chimie appliquée). In-8 (23×14) de IV-332 pages avec figures (*B. T.*); 1904. 7 fr.

LEBON (E.), Membre correspondant de l'Académie royale des Sciences de Lisbonne, Professeur agrégé de Mathématiques au Lycée Charlemagne. — **Histoire abrégée de l'Astronomie.** Petit in-8 en caractères elzevirs, titre en deux couleurs, avec 16 portraits et 1 carte du Ciel; 1899. (*Ouvrage couronné par l'Académie française.*) 8 fr.

LECHALAS (Georges), Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. — **Introduction à la Géométrie générale.** In-16 (19×12) de IX-58 p. avec 5 fig.; 1905. 1 fr. 75 c.

LEDEBUR (A.), Professeur à l'Académie des Mines de Freiberg (Saxe). — **Traité de Technologie mécanique métallurgique.** Traduit sur la 2e édition allemande par G. Humbert, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. Avec un Appendice *Sur la sécurité des ouvriers dans le travail,* par M. Joly. Grand in-8 de IV-740 pages, avec 729 fig.; 1903. 25 fr.

LE VAVASSEUR, Maître de Conférences de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Lyon. — **Quelques considérations sur les groupes d'ordre finis et les groupes continus.** Grand in-8 (25 × 16); 1904. 5 fr.

LÉVY (Lucien), Examinateur d'admission et Répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique. — **Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques, avec Tables numériques et applications.** Grand in-8, avec figures; 1898. 7 fr. 50 c.

LÉVY (Maurice), Membre de l'Institut, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur au Collège de France et à l'École Centrale des Arts et Manufactures. — **La Statique graphique et ses applications aux constructions.** 2e édition. 4 vol. grand in-8, avec 4 Atlas de même format. (*Ouvrage honoré d'une souscription du Ministère des Travaux publics.*)

Ire Partie. — *Principes et applications de Statique graphique pure.* Grand in-8 de XXVIII-549 pages, avec figures et un Atlas de 26 planches; 1886. 22 fr.

IIe Partie. — *Flexion plane. Lignes d'influence. Poutres droites.* Gr. in-8 de XIV-345 pages, avec figures et un Atlas de 6 pl.; 1886. 15 fr.

IIIe Partie. — *Arcs métalliques. Ponts suspendus rigides. Coupoles et corps de révolution.* Grand in-8 de IX-418 p., avec fig. et un Atlas de 8 pl.; 1887. 17 fr.

IVe Partie. — *Ouvrages en maçonnerie. Systèmes réticulaires à lignes surabondantes. Index alphabétique des quatre Parties.* Grand in-8 de IX-350 pages, avec figures et un Atlas de 4 pl.; 1888. 15 fr.

LÉVY (L.), Docteur ès Sciences, Ingénieur agronome, Professeur de distillerie à l'École nationale des industries agricoles. — **Les Moûts et les Vins en distillerie.** In-8 (23 × 14) de VIII-651 pages avec 160 figures, cartonné à l'anglaise (*B. T.*); 1903. 14 fr.

LINDET (L.), Docteur ès Sciences, Professeur à l'Institut national agronomique. — **Le Froment et sa mouture. Traité de meunerie**, d'après un manuscrit inachevé de Aimé Girard, Membre de l'Institut. Grand in-8, avec 85 figures; 1903. 12 fr.

LOPPÉ (F.), Ingénieur des Arts et Manufactures. — **Essais industriels des machines électriques et des groupes électrogènes** (*Conférences de l'École supérieure d'Électricité*). Grand in-8° avec 129 figures; 1904. 8 fr.

LOPPÉ (F.). — **Traité élémentaire des enroulements des dynamos à courant continu.** In-16 (19 × 12) avec figures et 12 planches; 1904. 2 fr. 75 c.

LORENZ (Richard), Professeur à l'École Polytechnique fédérale de Zurich, Directeur des laboratoires d'Électrochimie et de Chimie physique. — **Traité pratique d'Électrochimie**, refondu, d'après l'édition allemande, par Georges Hostelet. In-8 (23 × 14) de VI-320 pages, avec 77 figures; 1905. 9 fr.

LUCAS (Édouard). — **Récréations mathématiques.** 4 volumes petit in-8, caractères elzévirs, titres en deux couleurs. (Voir le *Catalogue général*.)

LUCAS (Édouard). — **Théorie des nombres.** *Le calcul des nombres entiers. Le calcul des nombres rationnels. La divisibilité arithmétique.* Grand in-8, avec figures; 1891. 15 fr.

MANNHEIM (le Colonel A.), Professeur à l'École Polytechnique. — **Principes et Développements de la Géométrie cinématique**, *Ouvrage contenant de nombreuses applications à la Théorie des surfaces.* In-4, avec 186 figures; 1894. 25 fr.

MANNHEIM (A.). — **Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique**; comprenant les Éléments de la Géométrie cinématique. 2e édition. Grand in-8 avec 256 figures; 1886. 17 fr.

MARCHIS (L.), Professeur adjoint de Physique à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — **Leçons sur les moteurs à gaz et à pétrole**, faites à la Faculté des Sciences de Bordeaux. In-18 jésus de L-175 pages, avec 19 fig.; 1901. 2 fr. 75 c.

MARCHIS (L.). — **Thermodynamique.** *Notions fondamentales.* Grand in-8, avec figures; 1904. 5 fr.

MARTIN (Émile) et PERNOT (Félix), anciens Élèves de l'École Polytechnique, Professeurs à l'École Sainte-Geneviève. — **Géométrie cotée**, à l'usage des candidats aux Écoles du Gouvernement. In-8 carré (23 × 14) de V-311 pages, avec 233 figures; 1903. 5 fr.

MASCART (E.), Membre de l'Institut, Professeur au Collège de France, Directeur du Bureau central météorologique. — **Traité de Magnétisme terrestre**, grand in-8, avec 94 figures; 1900. 15 fr.

MASCART (E.), Membre de l'Institut, Professeur au Collège de France, Directeur du Bureau Central météorologique. — **Traité d'Optique.** 3 volumes grand in-8 avec Atlas, se vendant séparément.

Tome I : *Systèmes optiques. Interférences. Vibrations. Diffraction. Polarisation. Double réfraction.* Avec 199 figures et 2 pl.; 1889. 20 fr.

Tome II et Atlas : *Propriétés des cristaux. Polarisation rotatoire. Réflexion vitrée. Réflexion métallique. Réflexion cristalline. Polarisation chromatique.* Avec 113 fig. et Atlas contenant 2 planches sur cuivre dont une en couleur (Propriétés des cristaux. Coloration des cristaux par les interférences); 1891. 25 fr.

Tome III : *Polarisation par diffraction. Propagation de la lumière. Photométrie. Réfractions astronomiques.* Avec 83 figures; 1893. 20 fr.

MATHIAS (E.), Professeur de Physique à la Faculté des Sciences de Toulouse. — **Le point critique des corps purs.** In-8 de VIII-255 p., avec 44 fig.; 1904. 7 fr.

MATHIEU (Émile), Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. — **Traité de Physique mathématique.**
(*Voir* le détail des volumes au *Catalogue général*.)

MARX (A.), Inspecteur général des Ponts et Chaussées en retraite. — **L'Éther Principe universel des forces.** Mémoires résumés par C. Benoit, Licencié ès Sciences, ancien Élève de l'École Polytechnique. Grand in-8 (25 × 14) de 217 pages, avec figures; 1905. 6 fr. 50 c.

MAXWELL (James Clerk), Professeur de Physique expérimentale à l'Université de Cambridge. — **Traité de l'Électricité et du Magnétisme.** Traduit de l'anglais sur la 2e édition, par Seligmann-Lui, Ingénieur des Télégraphes, avec *Notes et Éclaircissements* par Cornu, Membre de l'Institut, et Potier, Professeur à l'École Polytechnique, et suivi d'un *Appendice sur la théorie des Quaternions*, par E. Sarrau, Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. Deux forts volumes grand in-8, avec 122 figures et 20 planches; 1885-1889. 30 fr.
Chaque volume................. 15 fr.

MÉRAY, Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon. — **Leçons nouvelles d'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques.** 4 volumes grand in-8.

Ire Partie : *Principes généraux*; 1894. 13 fr.

IIe Partie : *Étude monographique des principales fonctions d'une seule variable*; 1895. 14 fr.

IIIe Partie : *Questions analytiques classiques*; 1897. 6 fr.

IVe Partie : *Applications géométriques classiques*; 1898. 7 fr.

MOISSONNIER (P.), Pharmacien principal de l'Armée, ex-Secrétaire de la Commission de l'aluminium au Ministère de la Guerre. — **L'aluminium. Ses propriétés. Ses applications.** *Historique. Minerais. Fabrication. Propriétés. Applications générales.* Grand in-8 avec 21 figures et un titre tiré sur aluminium; 1903. 7 fr. 50 c.

36726 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

POTRON. — **Les groupes d'ordre** p^6 (Thèse). In-4 (28 × 22,5) de 177 pages; 1904. 8 fr.

RAFFY, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences et à l'École Normale supérieure. — **Leçons sur les applications géométriques de l'Analyse.** *Éléments de la théorie des courbes et des surfaces.* Grand in-8, avec figures; 1897. 7 fr. 50 c.

RÉPERTOIRE BIBLIOGRAPHIQUE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, publié par la *Commission permanente du Répertoire.* Paraît successivement par séries de 100 fiches format in-32 ($14^{cm} \times 9^{cm}$), renfermées dans un étui en papier fort. Prix de chaque série. 2 fr.

Les quatorze premières séries (fiches 1 à 1400, 1894-1904), sont mises en vente.

RESAL (H.).— **Exposition de la Théorie des surfaces.** In-8, avec figures; 1891. 4 fr. 50 c.

REY-PAILHADE (J.-A. de), Ingénieur civil des Mines, et **JOUFFRAY (A.-Ch.),** Astronome. — **Éphémérides décimales pour le méridien de Paris à l'usage des Astronomes et des Navigateurs pour 1905,** avec une Préface de M. E. Goedseels. Un volume grand in-8 (27,5 × 19) de xx-95 pages; 1904. 6 fr. 50 c.

RODET (J.), Ingénieur des Arts et Manufactures. — **Distribution de l'énergie par courants polyphasés.** 2ᵉ édition entièrement refondue. In-8, avec 273 fig.; 1903. 15 fr.

RODET (J.). — **Résistance, inductance et capacité.** In-8 (23 × 14) de x-257 p., avec 76 fig.; 1905. 7 fr.

ROUCHÉ (Eugène), et **COMBEROUSSE (Charles de).** — **Traité de Géométrie,** 7ᵉ éd., revue et augmentée, par Eugène Rouché. Fort in-8 de LX-1212 pages, avec 703 fig., et 1175 questions proposées et problèmes; 1900. 17 fr.

Prix de chaque Partie :

Iʳᵉ Partie. — *Géométrie plane*............ 7 fr. 50 c.

IIᵉ Partie. — *Géométrie de l'espace; Courbes et Surfaces usuelles.* 9 fr. 50 c.

ROUCHÉ (Eugène) et **COMBEROUSSE (Charles de).**— **Éléments de Géométrie,** suivis d'un complément a l'usage des élèves de mathématiques élémentaires et de mathématiques spéciales, et de *Notions sur le Lever des plans, l'Arpentage et le Nivellement.* 7ᵉ édit. conforme au programme du 31 mai 1902, revue et complétée par Eugène Rouché, Membre de l'Institut, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, Examinateur de sortie à l'École Polytechnique. In-8 de XL-651 pages, avec 485 figures et 543 questions proposées et exercices; 1904. 6 fr.

SAINT-GERMAIN (de), Doyen de la Faculté des Sciences de Caen. — **Recueil d'Exercices sur la Mécanique rationnelle,** à l'usage des candidats à la Licence et à l'Agrégation des Sciences mathématiques. 2ᵉ édition, entièrement refondue. In-8, avec fig.; 1889. 9 fr. 50 c.

SALMON (G.), Professeur au Collège de la Trinité, à Dublin. — **Traité de Géométrie analytique à deux dimensions (Sections coniques).** Traduit de l'anglais par *H. Resal* et *Vaucheret.* 3ᵉ édition française (conforme à la deuxième) publiée d'après la 6ᵉ édition anglaise, par *Vaucheret,* ancien Élève de l'École Polytechnique, Lieutenant-Colonel d'Artillerie, Professeur à l'École supérieure de Guerre. In-8, avec 124 figures; 1897. 12 fr.

SALMON (G.). — **Traité de Géométrie analytique (Courbes planes),** destiné à faire suite au *Traité des Sections coniques.* Traduit de l'anglais, sur la 3ᵉ édition, par *O. Chemin,* Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École nationale des P. et Ch., et augmenté d'une *Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes,* par *G. Halphen.* Nouveau tirage. In-8, avec figures; 1903. 12 fr.

SALMON (G.). — **Traité de Géométrie analytique à trois dimensions.** Traduit de l'anglais, sur la quatrième édition, par *O. Chemin.*

Iʳᵉ Partie : *Lignes et surfaces du 1ᵉʳ et du 2ᵉ ordre.* 2ᵉ édition. In-8, avec figures; 1898. 7 fr.

IIᵉ Partie : *Théorie des surfaces. Courbes gauches et surfaces développables. Famille de surfaces.* 2ᵉ édition. In-8, avec figures; 1903. 6 fr.

IIIᵉ Partie : *Surfaces dérivées des quadriques. Surfaces du troisième et du quatrième degré. Théorie générale des surfaces.* In-8, avec figures; 1892. 4 fr. 50 c.

SAUSSURE (René de). — **Théorie géométrique du mouvement des corps (solides et fluides).** Grand in-8 avec 31 figures; 1902. 6 fr.

SCHRÖN (L.). — **Tables de Logarithmes à sept décimales** pour les nombres depuis **1** jusqu'à **108 000,** et pour les fonctions trigonométriques de 10 en 10 secondes; et **Table d'Interpolation pour le calcul des parties proportionnelles;** précédées d'une **Introduction** par *J. Hoüel.* Grand in-8 jésus. Paris; 1903.

Broché......... 10 fr. | Cartonné... 11 fr. 75.

On vend séparément :	Broché.	Cartonné.
Tables de Logarithmes...........	8 fr.	9 fr. 75 c.
Table d'interpolation............	2	3 25

SÉGUIER (A. de), Docteur ès sciences mathématiques. — **Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits.** Grand in-8 (25 × 16) de II-176 pages; 1904. 5 fr.

SERRET (J.-A.), Membre de l'Institut. — **Traité d'Arithmétique,** à l'usage des candidats au Baccalauréat ès Sciences et aux Écoles spéciales. 7ᵉ édition, revue et mise en harmonie avec les derniers Programmes officiels par **J.-A. Serret** et par **Ch. de Comberousse,** Professeur de Cinématique à l'École Centrale et de Mathématiques spéciales au Collège Chaptal. In-8; 1887. (*Autorisé par décision ministérielle.*)

Broché.. 4 fr. 50 c. | Cartonné. 5 fr. 25 c.

SERRET (J.-A.). — **Traité de Trigonométrie.** 8ᵉ édition, revue et augmentée. In-8, avec figures; 1900. (*Autorisé par décision ministérielle.*) 4 fr.

SERRET (J.-A.). — **Cours d'Algèbre supérieure.** 5ᵉ édition. 2 forts volumes in-8, avec figures; 1885. 25 fr.

SERRET (J.-A.). — **Cours de Calcul différentiel et intégral.** 5ᵉ édit. augmentée d'une *Note sur les fonctions elliptiques;* par Ch. Hermite. 2 forts vol. in-8, avec figures; 1900. 25 fr.

SERVICE GÉOGRAPHIQUE DE L'ARMÉE. — **Nouvelles Tables de logarithmes à cinq décimales** *pour les lignes trigonométriques dans les deux systèmes de la division centésimale et de la division sexagésimale du quadrant et pour les nombres de 1 à 12 000.* (Édition spéciale a l'usage des Candidats aux Écoles Polytechnique et de Saint-Cyr.) Grand in-8 cartonné. 3 fr.

SMITH (Edgar-F.), Professeur de Chimie à l'Université de Pennsylvanie. — **Analyse électrochimique.** Traduction publiée avec l'autorisation de l'auteur par Joseph Rosset, Ingénieur civil des Mines. In-18 jésus de XVI-203 pages, avec 27 figures; 1900. 3 fr.

SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE PHYSIQUE. — **Recueil de données numériques de la Physique.**

Optique; par M. H. Dufet.

Iᵉʳ Fascicule : *Longueurs d'onde. Indices des gaz et des liquides.* Grand in-8; 1898. 15 fr.

IIᵉ Fascicule : *Propriétés optiques des solides.* Grand in-8; 1899. 15 fr.

IIIᵉ Fascicule : *Pouvoirs rotatoires. Couleurs d'interférence. Supplément.* Grand in-8; 1900. 15 fr.

SOREL (E). — **La grande industrie chimique minérale.**
I. — *Soufre, Azote, Phosphates, Alun.* In-8 (23×14) de 809 pages avec 113 figures, cartonné à l'anglaise (*B. T.*); 1902. 15 fr.
II. — *Potasse, Soude, Chlore.* In-8 (23×14) de 679 pages avec 127 figures, cartonné à l'anglaise (*B. T.*); 1904. 15 fr.

SOUCHON (Abel). — **La construction des cadrans solaires.** *Ses principes, sa pratique*, précédée d'une *Histoire de la Gnomonique.* In-16 (19×12) de 52 pages avec figures et 2 planches; 1905. 2 fr. 75 c.

SPÉE (le chanoine Eug.), Docteur en Sciences, Astronome à l'Observatoire royal de Belgique. — **Région b-f du spectre solaire.** Un volume de texte in-4, avec atlas in-folio de 17 planches (32×50); 1897. 40 fr.

STIELTJES. — **Correspondance d'Hermite et de Stieltjes** (voir *Hermite*, p. 5).

STOFFAES (l'abbé), Professeur adjoint à la Faculté catholique des Sciences de Lille, Directeur de l'Institut catholique d'Arts et Métiers de Lille. — **Cours de Mathématiques supérieures** *à l'usage des candidats de la licence ès sciences physiques.* 2e édition. In-8 (23×14) avec figures; 1903. 10 fr.

STURM, Membre de l'Institut. — **Cours d'Analyse de l'École Polytechnique**, revu et corrigé par *Prouhet*, Répétiteur à l'École Polytechnique, et augmenté de la **Théorie élémentaire des Fonctions elliptiques**, par *H. Laurent.* 12e édition, mise au courant des nouveaux programmes de la Licence, par *A. de Saint-Germain*, Professeur à la Fac. des Sc. de Caen. 2 vol. in-8, avec fig.; 1901. Broché..... 15 fr. | Cartonné. 16 fr. 50 c.

STURM, Membre de l'Institut. — **Cours de Mécanique à l'École Polytechnique**, publié, d'après le vœu de l'auteur, par *E. Prouhet.* 5e édition, revue et annotée par *A. de Saint-Germain*, Professeur à la Faculté des Sciences de Caen. (Nouveau tirage.) 2 vol. in-8 (23×14), avec 189 figures; 1905. 14 fr.

TABLES DE MORTALITÉ (1900) des Rentiers et Assurés en cas de vie établies par le Comité des trois Compagnies. (*Comité des Compagnies d'assurances à primes fixes sur la vie :* ASSURANCES GÉNÉRALES. UNION NATIONALE.) Grand in-8 ($27,5 \times 19$) de xxx-364 pages avec 8 graphiques en couleurs; 1902. 50 fr.

TANNERY (Jules), Sous-Directeur des Études scientifiques à l'École Normale supérieure, et **MOLK (Jules)**, Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. — **Éléments de la théorie des Fonctions elliptiques.** 4 volumes grand in-8 se vendant séparément. (OUVRAGE COMPLET.)
TOME I. — *Introduction.* — *Calcul différentiel* (Ire Partie); 1893. 7 fr. 50 c.
TOME II. — *Calcul différentiel* (IIe Partie); 1896. 9 fr.
TOME III. — *Calcul intégral* (Ire Partie); 1898. 8 fr. 50 c.
TOME IV. — *Calcul intégral* (IIe Partie) *et Applications*; 1902. 9 fr.

TEYSSIER (R.), Licencié ès sciences, Ingénieur chimiste. — **Manuel-Guide de la Fabrication du sucre**, à l'usage des fabricants de sucre, directeurs et chimistes de sucrerie, etc., et plus spécialement des contremaîtres et surveillants de cette industrie. In-8 (23-14) de 425 pages avec 129 figures (*B. T.*); 1904 9 fr.

TISSERAND (F.), Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, Professeur à la Faculté des Sciences, Directeur de l'Observatoire de Paris. — **Traité de Mécanique céleste.** 4 beaux volumes in-4, se vendant séparément.
TOME I : *Perturbations des planètes d'après la méthode de la variation des constantes arbitraires*, avec figures; 1889. 25 fr.
TOME II : *Théorie de la figure des corps célestes et de leur mouvement de rotation*, avec figures; 1891. 28 fr.
TOME III : *Exposé de l'ensemble des théories relatives au mouvement de la Lune*, avec fig.; 1894. 22 fr.
TOME IV et dernier : *Théories des satellites de Jupiter et de Saturne. Perturbations des petites planètes*, avec figures; 1896. 28 fr.

VERNEUIL (A.). — **Mémoire sur la reproduction artificielle du rubis par fusion.** In-8 (23-14) de 32 pages avec figures; 1904. 1 fr.

VIDAL (Léon), Capitaine de vaisseau en retraite. — **Manuel pratique de Cinématique navale et maritime**, *à l'usage de la Marine de guerre et de la Marine du Commerce* (Ouvrage entrepris par ordre de M. le Ministre de la Marine). Grand in-8 (25×16) de VIII-171 pages avec 153 figures; 1905. 7 fr. 50 c.

VILLIÉ (E.), ancien Ingénieur des Mines, Docteur ès Sciences, Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille. — **Compositions d'Analyse, Cinématique, Mécanique et Astronomie** données depuis 1869 à la Sorbonne pour la *Licence ès Sciences mathématiques*, suivies d'EXERCICES SUR LES VARIABLES IMAGINAIRES. **Énoncés et Solutions.** 3 vol. in-8, avec fig., se vendant séparément.
Ire PARTIE : *Compositions données depuis* 1869. In-8; 1885. 9 fr.
IIe PARTIE : *Compositions données depuis* 1885. In-8; 1890. 8 fr. 50
IIIe PARTIE : *Compositions données depuis* 1889. In-8; 1898. 8 fr.

VIOLEINE (A.-P.). — **Nouvelles Tables pour les calculs d'Intérêts composés, d'Annuités et d'Amortissement.** 8e édition, entièrement refondue par *A. Arnaudeau.* In-4; 1903. 15 fr.

VIVANTI (G.). — **Leçons élémentaires sur la théorie des groupes de transformations**, professées à l'Université de Messine, traduites par A. BOULANGER, Maître de Conférences à l'Université de Lille. Grand in-8 (25×16) de VII-296 pages, avec figures; 1904. 8 fr.

WITZ (Aimé), Docteur ès Sciences, Ingénieur des Arts et Manufactures, Professeur aux Facultés catholiques de Lille. — **Cours élémentaire de manipulations de Physique**, *à l'usage des Candidats aux Écoles et au Certificat d'études physiques, chimiques et naturelles.* (P.C.N.). 2e éd., augm. In-8, avec 77 fig.; 1895. 5 fr.
— **Cours supérieur de manipulations de Physique**, *préparatoire aux certificats d'études supérieures et à la Licence* (ÉCOLE PRATIQUE DE PHYSIQUE). 2e édition, revue et augmentée. In-8, avec 138 figures; 1897. 10 fr.

WOLF (C.), Membre de l'Institut, Astronome honoraire de l'Observatoire. — **Histoire de l'Observatoire de Paris, de sa fondation à 1793.** Grand in-8 de XII-392 pages avec 16 planches; 1902. 15 fr.

II. — COLLECTION DES ŒUVRES DES GRANDS GÉOMÈTRES.

BELTRAMI. — **Opere matematiche di Eugenio Beltrami**, pubblicate per cura della Facolta di Scienze della R. Universita.
TOME I : In-4 de 337 pages avec un portrait de Beltrami; 1902. 25 fr.
TOME II : In-4 de 468 pages; 1904. 25 fr.

BRIOSCHI (Francesco). — **Opere matematiche di Francesco Brioschi**, publicate per cura del comitato per le onoranze a Francesco Brioschi (G. Ascoli, E. Beltrami, G. Colombo, L. Cremona, G. Negri, G. Schiaparelli).
TOME I. In-4 de XI-416 pages, avec un portrait de Brioschi; 1901. 25 fr.

Tome II. In-4 de VIII-456 pages; 1902. 25 fr.
Tome III : In-4 de 435 pages; 1904. 25 fr.

CAUCHY (A.). — **Œuvres complètes d'Augustin Cauchy**, publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique, avec le concours de *C.-A. Valson*, *J. Collet* et *E. Borel*, docteurs ès Sciences. 27 volumes in-4.

Ire Série. — Mémoires, Notes et Articles extraits des Recueils de l'Académie des Sciences. 12 volumes in-4.

*Tome I, 1882 : *Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant, d'une profondeur indéfinie. — Mémoire sur les intégrales définies.* — Tomes II et III : Mémoires extraits des *Mémoires de l'Académie des Sciences.* — *Tomes IV à XII (1884-1900); *Extraits des Comptes rendus de l'Académie des Sciences.* Chaque volume. 25 fr.

*La *Table générale de la Ire Série* se vend séparément. 2 fr. 50 c.

IIe Série. — Mémoires extraits de divers Recueils, Ouvrages classiques, Mémoires publiés en corps d'Ouvrage, Mémoires publiés séparément. 15 volumes in-4.

Tome I. — Mémoires extraits du *Journal de l'École Polytechnique.* — Tome II. Mémoires extraits de divers recueils : *Journal de Liouville, Bulletin de Férussac, Bulletin de la Société philomathique, Annales de Gergonne, Correspondance de l'École Polytechnique.* — *Tome III, 1897 : *Cours d'Analyse de l'École royale Polytechnique;* *Tome IV, 1898 : *Résumé des Leçons données à l'École Polytechnique sur le Calcul infinitésimal. Leçons sur le Calcul différentiel;* *Tome V : *Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal à la Géométrie;* *Tomes VI à IX (1887 à 1891) : *Anciens Exercices de Mathématiques;* *Tome X, 1895 : *Résumés analytiques de Turin. Nouveaux Exercices de Prague.* Chaque volume. 25 fr.

Tomes XI à XIV. *Nouveaux exercices d'Analyse et de Physique.*

Tome XV. *Mémoires séparés.*

SOUSCRIPTION.

IIe Série. Tome I. — *Mémoires extraits du Journal de l'École Polytechnique.* 20 fr.

Nota : Les volumes ne sont pas publiés d'après leur classement numérique; on suivra l'ordre qui intéressera le plus les souscripteurs.

Les volumes parus sont indiqués par un astérisque.

FERMAT. — **Œuvres de Fermat**, publiées par les soins de MM. *Paul Tannery* et *Charles Henry*, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique. In-4.

Tome I : *Œuvres mathématiques diverses. — Observations sur Diophante.* Avec 3 planches en héliogravure; 1891. 22 fr.

Tome II : *Correspondance de Fermat;* 1894. 22 fr.

Tome III : *Traductions par* M. Paul Tannery *des écrits latins de Fermat, de* l'Inventum novum *de Jacques de Billy, du* Commercium epistolicum *de Wallis;* 1896. 28 fr.

FOURIER. — **Œuvres de Fourier**, publiées par les soins de *Gaston Darboux*, Membre de l'Institut, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique.

Tome I : *Théorie analytique de la chaleur.* In-4, XXVIII-564 pages; 1888. 25 fr.

Tome II : *Mémoires divers.* In-4, XVI-636 pages, avec un portrait de Fourier en héliogravure; 1890. 25 fr.

GALOIS. — **Œuvres mathématiques d'Évariste Galois**, publiées sous les auspices de la Société mathématique de France, avec une *Introduction* par Émile Picard, Membre de l'Institut. Grand in-8, avec un portrait de Galois en héliogravure; 1897. 3 fr.

HERMITE. — **Œuvres de Charles Hermite**, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par Émile Picard, Membre de l'Institut. Volumes grand in-8 (25×16) se vendant séparément.

Tome I : Volume de XL-500 pages, avec un portrait d'Hermite; 1905. 18 fr.

Tome II : (*Sous presse.*)

HUYGENS (C.). — **Œuvres complètes de Christiaan Huygens**, publiées par la Société hollandaise des Sciences. 10 volumes in-4, se vendant séparément. 35 fr.

(*Voir* pour les détails le *Catalogue général.*)

LAGRANGE. — **Œuvres complètes de Lagrange**, publiées par les soins de *J.-A. Serret* et *G. Darboux*, Membres de l'Institut, sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique. In-4, avec un beau portrait de Lagrange, gravé sur cuivre par Ach. Martinet. (Ouvrage complet.)

La **Ire Série** comprend tous les *Mémoires* imprimés dans les *Recueils des Académies de Turin, de Berlin et de Paris*, ainsi que les *Pièces diverses* publiées séparément. Cette Série forme 7 volumes (Tomes I à VII; 1867-1877), qui se vendent séparément. 30 fr.

La **IIe Série** se compose de 7 vol., qui renferment les Ouvrages didactiques, la Correspondance et les Mémoires inédits; savoir :

Tome VIII : *Résolution des équations numériques;* 1879. 18 fr.

Tome IX : *Théorie des fonctions analytiques;* 1881. 18 fr.

Tome X : *Leçons sur le calcul des fonctions;* 1884. 18 fr.

Tome XI : *Mécanique analytique*, avec Notes de J. Bertrand et G. Darboux (1re Partie); 1888. 20 fr.

Tome XII : *Mécanique analytique*, avec Notes de J. Bertrand et G. Darboux (2e Partie); 1889. 20 fr.

Tome XIII : *Correspondance inédite de Lagrange et d'Alembert*, publiée d'après les manuscrits autographes et annotée par Ludovic Lalanne; 1882. 15 fr.

Tome XIV et dernier : *Correspondance de Lagrange avec Condorcet, Laplace, Euler et divers Savants*, publiée et annotée par Ludovic Lalanne, avec deux fac-similés; 1892. 15 fr.

LAGUERRE. — **Œuvres de Laguerre** publiées, sous les auspices de l'Académie des Sciences, par Ch. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché, membres de l'Institut. 2 volumes grand in-8, se vendant séparément.

Tome I : *Algèbre. Calcul intégral;* 1898. 15 fr.

Tome II : *Géométrie;* 1905. 20 fr.

LAPLACE. — **Œuvres complètes de Laplace**, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par les *Secrétaires perpétuels*, avec le concours de *H. Poincaré*, Membre de l'Institut, et de *A. Lebeuf*, Directeur de l'Observatoire de Besançon. Nouvelle édition, avec un beau portrait de Laplace, gravé sur cuivre par *Tony Goutière*. In-4.

Traité de Mécanique céleste. Tomes I à V (1878-1882).

Tirage sur papier vergé, au chiffre de Laplace; 5 vol. in-4. 100 fr.
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace (à petit nombre), 5 vol. in-4. 130 fr.
Les Tomes III, IV et V, papier vergé, se vendent séparément. 20 fr.
Les Tomes I à V, papier hollande, se vendent séparément. 26 fr.

Exposition du système du Monde. Tome VI (1884).

Tirage sur papier vergé, au chiffre de Laplace. 20 fr.
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace. 25 fr.

Théorie des probabilités. Tome VII (1886).

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace. 35 fr.
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace. 43 fr.

Mémoires divers. Tomes VIII à XIV.

Tomes VIII à XII. — *Mémoires extraits des Recueils de l'Académie des Sciences;* 1891-1898.

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace. Chaque vol. 20 fr.
Tirage sur papier de Hollande au chiffre de Laplace. Chaque vol. 25 fr.

Tome XIII. — *Mémoires extraits de la Connaissance des Temps;* 1904.

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace. 15 fr.
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace. 18 fr.

Le Tome XIV *et dernier* (Mémoires extraits de divers Recueils) *est sous presse.*

RIEMANN. — **Œuvres mathématiques de Riemann**, traduites par L. Laugel. Avec une Préface de Ch. Hermite et un Discours de Félix Klein. Grand in-8, avec figures; 1898. 14 fr.

ROBIN (G.), Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Paris. — **Œuvres scientifiques de Gustave Robin**, publiées sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique. Mémoires réunis et publiés par Louis Raffy, chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Paris. 2 volumes grand in-8 se vendant séparément.

Mathématiques : *Nouvelle théorie des fonctions, exclusivement fondée sur l'idée de nombre.* Un volume grand in-8; 1903. 7 fr.

Physique : Un volume grand in-8 en deux fascicules : *Physique mathématique.* (Distribution de l'Electricité, Hydrodynamique, Fragments divers). Un fascicule grand in-8; 1899. 5 fr.

Thermodynamique générale (Équilibre et modifications de la matière). Un fascicule grand in-8 avec 30 figures; 1901. 9 fr.

III. — COLLECTION DE TRADUCTIONS D'OUVRAGES SCIENTIFIQUES.

(*Voir, pour les détails, le Catalogue général.*)

AUERBACH (Dr F.). — **La Dominatrice du monde et son ombre.** *Conférence sur l'énergie et l'entropie.* In-16 (19 × 12) (allemand). 2 fr. 75 c.

BOLTZMANN (L.). — **Leçons sur la théorie des gaz.** 2 volumes grand in-8 (allemand).
Ire Partie, avec figures. 8 fr.
IIe Partie, avec figures. 10 fr.

BOYS (C.-V.). — **Bulles de savon.** In-18 jésus, avec 60 figures et 1 planche (anglais). 2 fr. 75 c.

CLEBSCH (C.). — **Leçons sur la Géométrie.** 3 vol. grand in-8, avec figures (allemand). 42 fr.
Tome I... 12 fr. | Tome II... 14 fr. | Tome III... 16 fr.

CREMONA. — **Les figures réciproques en Statique graphique.** Gr. in-8 et atlas de 34 pl. (italien). 5 fr. 50 c.

CULLEY. — **Manuel de Télégraphie pratique.** Grand in-8, avec 252 figures et 7 planches (anglais).
Broché... 18 fr. | Cartonné... 20 fr.

CUNDILL. — **Dictionnaire des Explosifs.** Grand in-8 (anglais). 6 fr.

EBERT (Dr H.). — **Guide pour le soufflage du verre.** Traduit sur la 2e édition et annoté par P. Lugol, Professeur de Physique au Lycée de Clermont-Ferrand. In-18 jésus, avec 63 fig. (allemand). 3 fr.

FAVARO. — **Leçons de Statique graphique.** 2 vol. grand in-8, avec 289 fig. et 2 planches (italien). 19 fr.
Tome I..... 7 fr. | Tome II.... 12 fr.

FIERZ (E.). — **Les recettes du distillateur.** In-18 jésus (allemand). 2 fr. 75 c.

FISHER et DARBY. — **Manuel élémentaire pratique de mesures électriques sur les câbles sous-marins.** In-8 avec 65 figures (anglais). 5 fr.

FLEMING. — **Le Laboratoire d'Électricité.** *Notes et formules* (anglais). In-8, avec figures.
Broché... 6 fr. | Cartonné... 7 fr. 50 c.

GRAY (John). — **Les machines électriques à influence.** In-8, avec 124 figures (anglais). 5 fr.

HERZBERG (Wilhelm). — **Analyse et Essais des papiers.** In-8 avec nombreuses figures et 2 planches (allemand). 5 fr.

JENKIN. — **Électricité et Magnétisme.** In-8, avec 270 figures (anglais). 12 fr.

JÜPTNER DE JONSTORFF. — **Traité pratique de Chimie métallurgique.** Grand in-8, avec 79 figures et 2 planches (allemand). 10 fr.

KEMPE. — **Traité pratique des mesures électriques.** In-8, avec 145 figures (anglais). 12 fr.

LEDEBUR. — **Technologie mécanique métallurgique.** Grand in-8 avec 729 figures (allemand). 25 fr.

LODGE. — **Les théories modernes de l'Électricité.** In-8, avec 53 figures (anglais). 5 fr.

LORENZ (Richard). — **Traité pratique d'Électrochimie.** In-8, avec 77 figures (allemand). 9 fr.

MAXWELL. — **Traité de l'Électricité et du Magnétisme.** 2 vol. gr. in-8, avec 122 fig. et 20 pl. (anglais). 30 fr.
Tome I... 15 fr. | Tome II... 15 fr.

— **Traité élémentaire d'Électricité.** In-8, avec figures (anglais). 7 fr.

MEYER (Fr.) [de Clausthal]. — **Sur les progrès de la théorie des invariants projectifs.** Grand in-8 (allemand). 4 fr.

OPPOLZER (I. d'). — **Traité de la détermination des orbites des comètes et des planètes.** Gr. in-8 (allemand). 20 fr.

OSTWALD (Prof. Dr W.). — **Éléments de Chimie inorganique** (allemand).
Ire Partie : *Métalloïdes.* Grand in-8. 15 fr.
IIe Partie : *Métaux.* Grand in-8. 15 fr.

PHILLIPS (H.-J.). — **Les Combustibles solides, liquides, gazeux.** *Analyse. Détermination du pouvoir calorifique.* In-18 jésus (anglais). 2 fr. 75 c.

PROCTOR (Richard). — **Nouvel Atlas céleste.** In-8, avec 12 cartes célestes et 2 planches (anglais).
Broché... 6 fr. | Cartonné... 7 fr.

RIEMANN. — **Œuvres mathématiques de Riemann.** Grand in-8 (allemand). 14 fr.

RUSSELL. — **Essai sur les fondements de la Géométrie.** Grand in-8 (anglais). 9 fr.

SALISBURY (Marquis de). — **Les limites actuelles de notre Science.** In-18 jésus (anglais). 1 fr. 50 c.

SALMON. — **Traité de Géométrie analytique (Courbes planes)** avec Appendice, par G. Halphen. In-8 (anglais). 12 fr.

— **Traité de Géométrie analytique à deux dimensions (Sections coniques).** 3e édition française (conforme à la 2e). In-8 (anglais). 12 fr.

— **Traité de Géométrie analytique à trois dimensions.** 3 vol. in-8 (anglais).
Tome I, 7 fr. — Tome II, 6 fr. — Tome III. 4 fr. 50 c.

— **Leçons d'Algèbre supérieure.** In-8 (anglais). 10 fr.

SANFORD (Gerald). — **Explosifs nitrés.** In-8, avec 51 figures et 1 planche frontispice (anglais). 6 fr.

SCHŒNFLIES. — **La Géométrie du mouvement. Exposé synthétique.** In-8 avec fig. (allemand). 6 fr. 50 c.

SCHWARZ (H.-A.). — **Formules et Propositions pour l'emploi des Fonctions elliptiques** *d'après des Leçons et des Notes manuscrites* de M. K. Weierstrass (allemand). In-4.
Broché...... 12 fr. | Cartonné.... 15 fr.

SCOTT. — **Cartes du temps et avertissements de tempêtes.** In-8, avec figures et 2 planches en couleurs (anglais). 4 fr. 50 c.

SERPIERI. — **Traité élémentaire des mesures absolues, mécaniques, électrostatiques et électromagnétiques, avec application à de nombreux problèmes.** In-8 (italien). 3 fr. 50 c.

SMITH (Edgar-F.). — **Analyse électrochimique.** In-18 jésus, avec 27 figures (anglais). 3 fr.

TAIT. — **Traité élémentaire des Quaternions.** 2 vol. gr. in-8, avec fig. (anglais). Chaque vol. séparément. 7 fr. 50 c.

— **Conférences sur quelques-uns des progrès récents de la Physique.** Gr. in-8, avec fig. (anglais). 7 fr. 50 c.

THOMSON (Sir William) [Lord Kelvin]. — **Constitution de la matière.** *Conférences scientifiques et allocutions.* (anglais). In-8, avec figures. 7 fr. 50 c.

THOMSON (J.-J.). — **Les décharges électriques dans les gaz.** In-8, avec 41 figures (anglais). 5 fr.

TYNDALL (John). — **La Chaleur.** *Mode de mouvement.* Avec 110 figures (anglais). 8 fr.

VIVANTI (G.). — **Leçons élémentaires sur la théorie des groupes de transformations.** Grand in-8 avec figures (italien). 8 fr.

WEBER (H.). — **Traité d'Algèbre supérieure.** Grand in-8, avec figures; (allemand). 22 fr.

WEIERSTRASS. — (*Voir* **SCHWARZ.**)

ZEUNER. — **Théorie mécanique de la chaleur,** *avec ses applications aux machines.* 2e édition. In-8, avec figures (allemand). 10 fr.

ZEUTHEN (H.-G.). — **Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge.** In-8, avec 31 figures (allemand). 9 fr.

Voir à la Bibliothèque photographique les traductions (format in-18 jésus et in-8) de *Burton, Cronenberg, Dallmeyer, Eder, Hesse, Liesegang, Robinson.*

IV. — BIBLIOTHÈQUE DES ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES.

130 Ouvrages in-18 jésus, ou petit in-8.

(*Voir le prospectus spécial.*)

DERNIERS OUVRAGES PARUS :

Récréations mathématiques; par Ed. Lucas. Quatre jolis volumes, caractères elzévir, titres en deux couleurs. — Tome I (2e édition) : 7 fr. 50 c.; Tome II : 7 fr. 50 c.; Tome III : 6 fr. 50 c.; Tome IV : 7 fr. 50 c.

Les Limites actuelles de notre Science. Discours présidentiel prononcé le 8 août 1894, par le Marquis de Salisbury, Premier Ministre d'Angleterre, devant la *British Association*, dans sa session d'Oxford. Traduit par M. W. de Fonvielle. 1 fr. 50 c.

La Théorie atomique et la théorie dualistique, *Transformation des formules. Différences essentielles entre les deux théories*, par Lenoble, Professeur de Chimie à l'Université libre de Lille. 2 fr.

Les Ballons-sondes et les ascensions internationales par M. W. de Fonvielle, précédé d'une Introduction par M. Bouquet de la Grye, Membre de l'Institut. 2e édition, avec 27 figures. 2 fr. 75 c.

Les Recettes du distillateur, par E. Fierz. Traduit de l'allemand par E. Philippi. 2 fr. 75 c.

La Télégraphie sans fil, par A. Broca. 2e édition. 4 fr.

Analyse électrochimique, par Edg.-F. Smith. Traduit de l'anglais par J. Rosset. Avec 27 figures. 3 fr.

Une langue universelle est-elle possible? Exposé des moyens pour faire le choix et assurer le succès d'une langue scientifique et commerciale universelle, par L. Leau. 1 fr.

Leçons sur les moteurs à gaz et à pétrole faites à la Faculté des Sciences de Bordeaux; par L. Marchis. In-18 jésus de L-175 pages, avec 19 figures. 2 fr. 75 c.

Les Combustibles solides, liquides, gazeux. *Analyse et détermination du pouvoir calorifique.* Traduit de l'anglais par J. Rosset. In-18 jésus, avec 15 figures. 2 fr. 75 c.

Traité élémentaire des enroulements des dynamos à courant continu; par F. Loppé. In-16 (19 × 12), avec fig. et planches. 2 fr. 75 c.

Le Radium et la Radioactivité. *Propriétés générales. Emplois médicaux;* par P. Besson. In-16 (19 × 12), avec 23 figures. 2 fr. 75 c.

Rayons « N ». Recueil des Communications faites à l'Académie des Sciences, par R. Blondlot. In-16 (19 × 12) avec figures et 1 planche écran phosphorescent. 2 fr.

Introduction à la Géométrie générale, par Georges Lechalas, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. In-16 (19 × 12) de IX-58 pages. 1 fr. 75 c.

La Dominatrice du monde et son ombre. Conférence sur l'énergie et l'entropie, par le Dr F. Auerbach. Traduction par le Dr Robert Tissot, et Préface de Ch.-Ed. Guillaume. In-16 (19 × 12). 2 fr. 75 c.

La Construction des cadrans solaires. Ses principes, sa pratique, précédée d'une Histoire de la Gnomonique, par Abel Souchon. In-16 (19 × 12), avec figures et 2 planches. 2 fr. 75 c.

Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres, par Claude-Gaspar Bachet, sieur de Méziriac, 4e édition revue et simplifiée. Petit in-8 (19 × 12) de VI-163 pages; 1905. 3 fr. 50 c.

V. — EXTRAIT DU CATALOGUE DE LA BIBLIOTHÈQUE PHOTOGRAPHIQUE.

(Demander le Catalogue complet.)

Aide-Mémoire de Photographie, publié depuis 1876 sous les auspices de la Société photographique de Toulouse, par C. Fabre. In-18, avec figures et spécimens.

Broché.... 1 fr. 75 c. | Cartonné.. 2 fr. 25 c.

Les volumes des années précédentes, sauf 1877, 1878, 1879, 1880 *et* 1883, *se vendent aux mêmes prix.*

Belin (Edouard), ancien Élève de l'Ecole impériale et royale de Photographie de Vienne, — *Manuel pratique de Photographie au charbon.* In-18 jésus avec 6 figures; 1900. 2 fr.

Belin (Édouard). — *Précis de Photographie générale.* 2 volumes grand in-8 se vendant séparément.

Tome I. Généralités, opérations photographiques. Volume de VIII-246 pages, avec 95 figures; 1905. 7 fr.

Tome II. Applications scientifiques et industrielles. (*Sous presse.*)

Berget (Alphonse), Docteur ès Sciences. — *La Photographie des Couleurs par la méthode interférentielle de M. Lippmann*, 2e édition entièrement refondue. In-18 jésus, avec 22 figures; 1901. 1 fr. 75 c.

Bernard (J.) et Touchebeuf (L.). — *Petits clichés et grandes épreuves.* Guide photographique du touriste cycliste. In-18 jésus; 1898. 2 fr. 75 c.

Braun fils (G. et Ad.). — *Dictionnaire de Chimie photographique à l'usage des professionnels et des amateurs.* Un volume grand in-8 de 546 pages. 1904; 12 fr.

Burton (W.-K.). — *A B C de la Photographie moderne.* Traduit de l'anglais sur la 12ᵉ édition par G. Huberson. 5ᵉ édition, revue et augmentée. In-18 jésus, avec fig.; 1901. 3 fr.

Colson (R.). — *La Photographie sans objectif au moyen d'une petite ouverture.* Propriétés, usage, applications. 2ᵉ édition, revue et augmentée. In-18 jésus, avec planche spécimen; 1891. 1 fr. 75 c.

Courrèges (A.), Praticien. — *Ce qu'il faut savoir pour réussir en Photographie.* 2ᵉ édition. Petit in-8, avec une planche photocollographique; 1896. 2 fr. 50 c.

— *La retouche du cliché.* Retouche chimique, physique et artistique. In-18 jésus; 1898. 1 fr. 50 c.

— *Impression des épreuves sur papiers divers, par noircissement, par impression latente et développement.* In-18 jésus, avec figures; 1898. 2 fr.

— *Le portrait en plein air.* In-18 jésus, avec figures et 1 planche en photocollographie; 1899. 2 fr. 50 c.

— *La reproduction des gravures, dessins, plans, manuscrits.* In-18 jésus, avec figures; 1900. 2 fr.

— *Les agrandissements photographiques.* In-18 jésus, avec figures; 1901. 2 fr.

Coustet (E.). — *Le développement en pleine lumière.* In-16 (19 × 12) de VIII-53 pages; 1905. 1 fr. 50 c.

Cronenberg (Wilhelm), Directeur de l'École de Photographie et de reproduction photographique de Grönenbach. — *La Pratique de la Phototypogravure américaine.* Traduit et augmenté d'un *Appendice* par C. Féry, Chef des travaux pratiques à l'École de Physique et de Chimie industrielles. In-18 jésus avec 66 figures et 13 planches; 1898. 3 fr.

Dallmeyer (Thomas R.), Président de la *Royal Photographic Society.* — *Le Téléobjectif et la Téléphotographie* : Traduction française augmentée d'un appendice bibliographique; par L.-P. Clerc. Grand in-8 (25 × 16) avec 51 figures et 11 planches; 1903........... 6 fr.

Darby (Paul), Photographe. — *La Photographie au charbon.* Traité pratique et simplifié. In-18 jésus. 1 fr.

Davanne. — *La Photographie. Traité théorique et pratique.* 2 beaux volumes grand in-8, avec 234 figures et 4 planches spécimens; 1886-1888. 32 fr.
Chaque Volume se vend séparément 16 fr.

Davanne (A.), **Bucquet** (M.) et **Vidal** (Léon). — *Le Musée rétrospectif de la Photographie à l'Exposition universelle de* 1900. Grand in-8 avec nombreuses figures et 11 planches; 1903. 5 fr.

Dillaye (Frédéric), *Principes et Pratique d'art en Photographie. Le Paysage.* Grand in-8, avec 32 figures et 34 photogravures de paysage; 1899. 5 fr.

Draux (F.). — *La Photogravure pour tous.* Manuel pratique. In-16 (19 × 12) de IV-68 pages; 1904. 1 fr. 50 c.

Eder (Dʳ J.-M.), Directeur de l'École impériale photographique de Vienne. — *Formules, Recettes et Tables pour la Photographie et les procédés de reproduction.* Édition revue par l'auteur; traduite de l'allemand par G. Braun fils. In-18 jésus; 1900. 4 fr.

Eder (le Dʳ J.-M.). — *Système de Sensitométrie des plaques photographiques.* Traduit de l'allemand par Édouard Belin. Grand in-8 de VI-52 pages, avec 9 figures et 17 planches dans le texte; 1903. 3 fr. 75 c.

Fabre (C.), Docteur ès Sciences. — *Traité encyclopédique de Photographie.* 4 beaux volumes gr. in-8, avec plus de 700 figures et 2 planches; 1889-1891. 48 fr.
Chaque volume se vend séparément 14 fr.

Des suppléments, destinés à exposer les progrès accomplis, viennent compléter ce Traité et le maintenir au courant des dernières découvertes.

Iᵉʳ *Supplément* (A). Gr. in-8 de 400 p., avec 176 figures; 1892. 14 fr.

IIᵉ *Supplément* (B). Gr. in-8 de 424 p. avec 221 figures; 1898. 14 fr.

IIIᵉ *Supplément* (C). Gr. in-8 de 424 p. avec 215 figures; 1902. 14 fr.

Les sept volumes se vendent ensemble 84 fr.

Fabre (C). — *Les industries photographiques. Matériel. Procédés négatifs. Procédés positifs. Tirages industriels. Projections. Agrandissements.* Annexes. Grand in-8 (25 × 16) de 602 pages, avec 183 figures; 1903 .... 18 fr.

Ferret (l'abbé J.). — *La Photographie par le Collodion.* In-16 (19 × 12); 1903. 1 fr. 50 c.

Fourtier (H.). — *Dictionnaire pratique de Chimie photographique,* contenant une *Étude méthodique des divers corps usités en Photographie,* précédé de *Notions usuelles de Chimie* et suivi d'une Description détaillée des *Manipulations photographiques.* Gr. in-8, avec fig.; 1892. 8 fr.

Klary, Artiste photographe. — *La Photographie d'Art à l'Exposition universelle de* 1900. Grand in-8 avec de nombreuses illustrations et planches; 1901. 6 fr. 50 c.

— *L'Art de retoucher en noir les épreuves positives sur papier.* 3ᵉ tirage. In-18 jésus; 1898. 1 fr.

— *L'Art de retoucher les négatifs photographiques.* 5ᵉ tirage. In-18 jésus, avec figures; 1902. 2 fr.

— *Traité pratique de la peinture des épreuves photographiques,* avec les couleurs à l'aquarelle et à l'huile, suivi de différents procédés de peinture appliqués aux photographies. 2ᵉ tirage. In-18 jésus; 1899. 3 fr. 50 c.

— *L'Éclairage des portraits photographiques.* 8ᵉ édition. In-18 jésus, avec 20 figures; 1902. 1 fr. 75 c.

— *Les portraits au crayon, au fusain et au pastel,* obtenus au moyen des agrandissements photographiques. Nouveau tirage (19 × 12); 1904. 2 fr. 50 c.

Laynaud (L.), Typographe. — *La Phototypie pour tous et ses applications directes aux tirages lithographiques et typographiques.* Traité pratique de vulgarisation à l'usage des imprimeurs, etc. In-18 jésus, avec figures; 1900. 2 fr.

Londe (A.), Chef du service photographique à la Salpêtrière. — *La Photographie instantanée. Théorie et pratique.* 3ᵉ édition entièrement refondue. In-18 jésus, avec 65 figures; 1897. 2 fr. 75 c.

— *Traité pratique du développement.* Étude raisonnée des divers révélateurs et de leur mode d'emploi. 4ᵉ édition, revue et augmentée. In-18 jésus, avec figures; 1904. 2 fr. 75 c.

— *Traité pratique de Radiographie et de Radioscopie.* Technique et applications médicales. Grand in-8 avec 113 figures; 1899. 7 fr.

— *La Photographie médicale. Application aux sciences médicales et physiologiques.* Grand in-8, avec 80 figures et 19 planches; 1893. 9 fr.

— *La Photographie à l'éclair magnésique.* Grand in-8 (25 × 16) de IX-99 pages, avec 23 figures et 8 planches; 1905. 4 fr.

Martel (E.-A.). — *La Photographie souterraine.* In-16 raisin avec 16 planches; 1903. 2 fr. 50 c.

Maskell (Alfred) et **Demachy** (Robert). — *Le procédé à la gomme bichromatée ou photo-aquateinte.* Traduit de l'anglais par G. Devanlay. 2ᵉ édition entièrement refondue par Robert Demachy. In-16 (19 × 12) de 86 p., avec 3 figures; 1905. 2 fr.

Maurion (Georges). — *Le matériel photographique.* Ses imperfections. Comment les reconnaître; comment y remédier. In-16 (19 × 12) de VI-68 pages; 1902. 1 fr. 75 c.

Mercier (P.), Chimiste, Lauréat de l'École supérieure de Pharmacie de Paris. — *Virages et fixages. Traité historique, théorique et pratique.* 2 vol. in-18 j.; 1892. 5 fr.

On vend séparément :

Ire Partie : *Notice historique. Virages aux sels d'or.* 2 fr. 75 c.
IIe Partie : *Virages aux divers métaux. Fixages.* 2 fr. 75 c.

Molinié (Marcel), Licencié ès Sciences physiques, Ancien Élève de l'École de Physique et Chimie industrielles de la Ville de Paris. — *Comment on obtient un cliché photographique.* Notions de chimie photographique. Technique et pratique du développement. Petit in-8. 2 fr.

Panajou, Chef du Service photographique à la Faculté de Médecine de Bordeaux. — *Manuel du photographe amateur.* 3e édit., entièrement refondue et considérablement augmentée. Petit in-8, avec 63 fig.; 1899. 2 fr. 75 c.

Pierre Petit fils (Auguste). — *La Photographie simplifiée et la lumière artificielle.* In-16 (19 × 12), avec 30 figures et 1 planche; 1903. 2 fr.

Pierre Petit fils (F.).— *Dix Leçons de Photographie aux maisons d'éducation de la Légion d'honneur.* Petit in-8 (18 × 15) de 118 pages avec 16 figures, 1904. 2 fr.

Puyo (C.). — *Notes sur la Photographie artistique.* Texte et illustrations. Plaquette de grand luxe in-4 raisin, contenant 11 héliogravures de Dujardin et 39 phototypogravures dans le texte; 1896. 10 fr.
Il reste quelques exemplaires sur Japon, avec planches également sur Japon. 20 fr.

Ris-Paquot. — *La préparation des plaques au gélatino-bromure par l'amateur lui-même.* In-16 raisin avec 17 figures; 1903. 2 fr.

Robinson (H.-P.). — *La Photographie en plein air. Comment le photographe devient un artiste.* Traduit de l'anglais par Hector Colard. 3e tirage. 2 vol. gr. in-8; 1899. 5 fr.

Rouyer (L.). — Lieutenant-Colonel du Génie, en retraite. — *Manuel pratique de Photographie sans objectif.* In-16 (19 × 12) avec 19 fig.; 1904. 2 fr. 50 c.

Sollet (Ch.). — *Traité pratique des tirages photographiques*, avec une Préface de C. Puyo. In-16 raisin de VIII-240 pages; 1902. 4 fr.

Trutat (E.), Directeur du Musée d'Histoire naturelle de Toulouse, Président de la section des Pyrénées Centrales du Club Alpin français, Président de la Société photographique de Toulouse. — *La Photographie animée*, avec une Préface de M. Marey, Membre de l'Institut. Grand in-8 avec 146 fig. et 1 pl.; 1899. 5 fr.
— *Dix Leçons de Photographie.* Cours professé au muséum de Toulouse. In-18 jésus avec figures; 1899. 2 fr. 75 c.
— *Les tirages photographiques aux sels de fer.* In-16 (19 × 12); 1904. 1 fr. 25 c.

Vidal (Léon), Officier de l'Instruction publique, Professeur à l'École nationale des Arts décoratifs. — *Traité pratique de Photochromie.* In-18 jésus avec 96 figures et 14 planches en couleurs; 1903. 7 fr. 50 c.
— *Traité de Photolithographie.* In-18 jésus, avec 25 figures, 2 planches et spécimens de papiers autographiques; 1893. 6 fr. 50 c.
— *Traité pratique de Photogravure en relief et en creux.* In-18 jésus, avec 65 figures et 6 planches; 1900. 6 fr. 50 c.

Vieuille (G.). — *Nouveau guide pratique du photographe amateur.* 3e édition, entièrement refondue et beaucoup augmentée. In-18 jésus; 1892. 2 fr. 75 c.

Wallon (E.). Professeur de Physique au Lycée Janson de Sailly. — *Traité élémentaire de l'objectif photographique.* Grand in-8, avec 135 figures; 1891. 7 fr. 50 c.
— *Choix et usage des objectifs photographiques.* Petit in-8 avec 25 figures; 1893.
Broché........ 2 fr. 50. | Cartonné toile anglaise. 3 fr.

VI. — JOURNAUX.

(Les abonnements sont annuels et partent de janvier.)

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE pour les Sciences mathématiques et les Sciences physiques, publiées sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique par un *Comité de rédaction composé des Professeurs de Mathématiques, de Physique et de Chimie de la Faculté.* In-4, trimestriel.

Ire Série, 12 volumes in-4 (années 1887-1898) se vendant ensemble. 240 fr.
Chacun des Tomes I à XII (1887-1898) séparément 20 fr.

IIe Série, Tomes I à VI (1899-1904). Chaque année. 25 fr.

Prix pour un an (4 fascicules) :
Paris....................... 25 fr.
Départements et Union postale. 28 fr.

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE, publiées par les *Facultés de Droit, des Sciences et des Lettres*, et par *l'École de Médecine.* Grand in-8.

Prix de l'abonnement (3 numéros) :
France........ 12 fr. | Étranger..... 15 fr.

Par exception, l'année 1889 ne comprend que les numéros du 1er juin et du 1er décembre; le prix de cette année est de 8 fr.

ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE MONTSOURIS. Météorologie. Chimie. Micrographie. Applications à l'hygiène.

Ces Annales, publiées sous la direction des chefs de service, paraissent régulièrement chaque trimestre par fascicule de 6 feuilles grand in-8 avec figures et planches.
Les *Annales de l'Observatoire municipal (Observatoire de Montsouris)* forment la suite naturelle des *Annuaires* parus de 1872 à 1900.

Prix pour un an (4 fascicules).
Paris............15 fr. | Dép. et Union postale. 17 fr.

Le Tome I (1900) contient le résumé des travaux des années 1899-1900.
Les Tomes II à V (1901-1904) contiennent le résumé des travaux de l'année 1901 à 1904.
Un fascicule spécimen est envoyé sur demande.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, publiées sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique, par un *Comité de Rédaction composé des Maîtres de Conférences.* In-4, mensuel.

1re Série, 7 volumes, années 1864 à 1870. 150 fr.
2e Série, 12 volumes, années 1872 à 1883. 250 fr.
3e Série, les 10 volumes formant les années 1884 à 1893, ensemble. 200 fr.
— Les 10 volumes formant les années 1894 à 1903, ensemble 200 fr.

La 3e Série, commencée en 1884, paraît, chaque mois, par numéro contenant 4 à 5 feuilles in-4, avec fig. et pl.

On vend séparément.
Chacune des années 1864 à 1870, 1872 à 1903. 25 fr.
Chaque année suivante...................... 30 fr.
Table des matières et noms d'auteurs contenus dans les 2 premières Séries. In-4; 1887............ 2 fr.
Table des matières et noms d'auteurs contenus dans les Tomes I à X de la troisième Série (1884-1893). In-4; 1894. 1 fr.
Table des matières et noms d'auteurs contenus dans les Tomes XI à XX de la troisième Série (1894-1903). In-4; 1904. 1 fr.

Prix pour un an (12 numéros) :
Paris.. 30 fr. | Départements et Union postale. 35 fr.

BIBLIOGRAPHIE SCIENTIFIQUE FRANÇAISE. — **Recueil mensuel** publié sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique par le Bureau français du Catalogue international de la littérature scientifique.

La *Bibliographie* est partagée en deux Sections : 1re Section, *Sciences mathématiques et physiques*; 2e Section, *Sciences naturelles et biologiques*.

Prix pour un an (12 numéros) :

	Paris.	Départ. et Union post. fr.
1re Section (6 numéros par an)....	5,50	6,50
2e Section (6 numéros par an).....	9,50	10,50
Les deux Séries réunies...........	15 »	17 »

Le numéro double 1-2 de l'année 1902, qui contient la liste des périodiques avec leurs abréviations et la classification scientifique, se vend séparément. 2 fr. 50 c.

BULLETIN ASTRONOMIQUE, publié par l'Observatoire de Paris. Commission de rédaction : *H. Poincaré*, président, *G. Bigourdan*, *J. Puiseux*, *R. Radau* et *H. Deslandres*. Grand in-8, mensuel.

Ce **Bulletin mensuel**, fondé en 1884, forme par an un beau volume grand in-8, avec figures et planches, de 30 à 35 feuilles.

Les dix premiers volumes (1884-1893) se vendent ensemble. 110 fr.

Les Tomes XI à XX (1894-1903) se vendent ensemble. 110 fr.

Chacun des Tomes I à XX (1884-1903) sauf le Tome XVI, 1899, séparément. 14 fr.

Chaque année suivante. 16 fr.

Prix pour un an (12 *numéros*) :
Paris................................ 16 fr.
Départements et Union postale...... 18 fr.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ INTERNATIONALE DES ELECTRICIENS.

Ce Bulletin, fondé en 1884, paraît chaque année, en dix numéros, formant un beau volume de 30 feuilles environ, grand in-8 jésus.

L'abonnement est annuel et part de janvier.

Prix pour un an :
Paris................................ 25 fr.
Départements et Union postale..... 27 fr.
Prix du numéro : 2 fr. 50 c.
Prix de chaque année depuis 1884.. 25 fr.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, publié par les Secrétaires. Grand in-8.

Ce *Bulletin*, fondé en 1873, paraît tous les trois mois; il forme chaque année un volume de 18 feuilles environ.

Prix pour un an :
Paris................................ 15 fr.
Départements et Union postale...... 16 fr.
Chaque année depuis 1873.......... 15 fr.

Table des Tomes I à XX (1873-1892). Grand in-8; 1894. 1 fr. 75 c.

Table des Tomes XXI à XXX (1893 à 1902). Grand in-8; 1904. 1 fr.

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, rédigé par *Gaston Darboux*, *E. Picard* et *Jules Tannery*. Grand in-8, mensuel. **IIe Série.**

La **1re Série**, Tomes I à XI, 1870 à 1876, suivie de la Table générale des onze années, se vend. 90 fr.
Chaque année de cette Ire Série se vend séparément. 15 fr.

Table générale des matières et noms d'auteurs contenus dans la 1re Série. Grand in-8; 1877. 1 fr. 50 c.

La **2e Série**, qui a commencé en janvier 1877, continue à paraître par livraisons mensuelles. Les 10 premières années de cette **2e Série** (1877 à 1886) se vendent ensemble. 120 fr.

Les 10 années suivantes (1887-1896) se vendent ensemble. 120 fr.

Chacune des 20 premières années de la **2e Série** (1877 à 1896) se vend séparément. 15 fr.

Chaque année suivante. 18 fr.

Prix pour un an (12 *numéros*) :
Paris................................ 18 fr.
Départements et Union postale...... 20 fr.

La Table *d'un des volumes du* **Bulletin** *est envoyée franco, comme spécimen, à toute personne qui en fait la demande par lettre affranchie.*

BULLETIN MENSUEL DU BUREAU CENTRAL MÉTÉOROLOGIQUE DE FRANCE, publié par E. Mascart, Directeur du Bureau Central Météorologique. In-4, mensuel.

Prix pour un an :
Paris. 5 fr. | Départements et Union postale. 6 fr.
Chaque année, depuis 1895. 5 fr.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES. In-4, hebdomadaire.

Ces **Comptes rendus** paraissent régulièrement tous les dimanches, en un cahier de 32 à 40 pages, quelquefois de 80 à 120.

Prix pour un an (52 *numéros et* 2 *Tables*).
Paris. 30 fr. | Départements. 40 fr.
Union postale. 44 fr.

La *Collection complète*, de 1835 à 1904, forme 139 volumes in-4. 1740 fr.

Chaque année, sauf 1845, 1878 à 1892, 1896 à 1898, *se vend séparément.* 25 fr.

Chaque volume, sauf les Tomes 20, 21, 76 à 108, 110, 112, 114, 115, 122 à 127, *se vend séparément.* 15 fr.

— **Table générale des Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences**, par ordre de matières et par ordre alphabétique de noms d'auteurs. 4 vol. in-4, savoir :

Tables des tomes I à XXXI (1835-1850); 1853. 25 fr.
Tables des tomes XXXII à LXI (1851-1865); 1870. 25 fr.
Tables des tomes LXII à XCI (1866-1880); 1888. 25 fr.
Tables des tomes XCII à CXXI (1881-1895); 1900. 25 fr.

ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE (L'). — Revue internationale, paraissant tous les deux mois depuis janvier 1899, par fascicule de 80 pages in-8 raisin (25 × 16), sous la direction de MM. **C.-A. Laisant** et **H. Fehr**, avec la collaboration de **M. Buhl** et sous les auspices d'un Comité de patronage composé de MM. **P. Appell** (Paris); — **Moritz Cantor** (Heidelberg); — **E. Czuber** (Vienne); — **W.-H. Ermakoff** (Kief); — **A.-R. Forsyth** (Cambridge); — **Z.-G. de Galdeano** (Saragosse); — **A.-G. Greenhill** (Wolwich); — **F. Klein** (Gottingen); — **G. Loria** (Gênes); — **P. Mansion** (Gand); — **Mittag-Leffler** (Stockholm); — **G. Oltramare** (Genève); — **Julius Petersen** (Copenhague); — **E. Picard** (Paris); — **H. Poincaré** (Paris); — **P.-H. Schoute** (Groningue); — **D.-E. Smith** (New-York); — **C. Stephanos** (Athènes); — — **F. Gomes Teixeira** (Porto); — **A. Vassilief** (Kasan); — **A. Ziwet** (Ann-Arbor).

Abonnement : Union postale.................. 15 fr.
Prix du numéro.............................. 3 fr.
La collection des six premiers volumes (1899 à 1903)................................... 72 fr.
Les Tomes I, III, IV et V sont en vente au prix de.. 15 fr. l'un

JOURNAL DE CHIMIE PHYSIQUE. Électrochimie, Thermochimie, Radiochimie, Mécanique chimique, Stœchiochimie, publié par Philippe-A. Guye, Professeur de Chimie à l'Université de Genève, avec la collaboration de nombreux savants.

Cette publication paraît en huit ou dix numéros formant un volume annuel de 600 à 700 pages grand in-8 (16 × 25).

Prix de l'abonnement, pour toute l'Union postale. 25 fr.
Prix des volumes précédents, chacun............ 30 fr.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, publié par Camille Jordan, Membre de l'Institut, avec la collaboration de *M. Lévy, A. Mannheim, E. Picard, H. Poincaré*. In-4, trimestriel.

1re Série, 20 volumes in-4, années 1836 à 1855 (au lieu de 600 francs). 400 fr.
2e Série, 19 volumes in-4, années 1856 à 1874 (au lieu de 570 fr.). 380 fr.
3e Série, 10 volumes in-4, années 1875 à 1884 (au lieu de 300 fr.) 200 fr.
4e Série, 10 volumes in-4, années 1885 à 1894 (au lieu de 300 fr.). 200 fr.
5e série, 10 volumes in-4, années 1895 à 1904. 200 fr.
Chacune des années 1836 à 1878, 1880 à 1904 se vend séparément. 25 fr.

La **6e Série,** commencée en 1905, se publie, chaque année, en 4 fascicules de 12 à 15 feuilles, paraissant au commencement de chaque trimestre.

Prix pour un an (4 fascicules) :
Paris.............................. .... 30 fr.
Départements et Union postale............ 35 fr.

— **Table générale des 20 volumes** de la **1re Série.** In-4. 3 fr. 50 c.
— **Table générale des 19 volumes** de la **2e Série.** In-4. 3 fr. 50 c.
— **Table générale des 10 volumes** de la **3e Série.** In-4. 1 fr. 75 c.
— **Table générale des 40 volumes** composant la **4e Série,** avec une Table générale des auteurs des 59 volumes des 4 premières séries (1836-1894). In-4. 1 fr. 75 c.

JOURNAL DE PHYSIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE, fondé par *d'Almeida* et publié par *E. Bouty, Lippmann, E. Mascart, L. Poincaré, A. Potier,* et MM. *Brunhes, Lamotte* et *G. Sagnac,* adjoints à la rédaction, avec la collaboration d'un grand nombre de professeurs et de physiciens. Grand in-8, mensuel.
Paris et Départements................. 17 fr.
Union postale.......................... 18 fr.

— **Table analytique et Table par noms d'auteurs des trois premières séries (1872-1901)** dressées par MM. E. Bouty et B. Brunhes, avec la collaboration de MM. Bénard, Carré, Couette, Lamotte, Marcuis, Maurain, Roy et Sandoz. Grand in-8. 10 fr.

L'INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS, dirigé par *C.-A. Laisant,* Docteur ès Sciences, ancien Élève de l'École Polytechnique, et *Émile Lemoine,* Ingénieur civil, ancien Élève de l'École Polytechnique, avec la collaboration de *Ed. Maillet,* Ingénieur des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique, et *A. Grévy,* Professeur au Lycée Saint-Louis (publication honorée d'une souscription du Ministère de l'Instruction publique). In-8, mensuel.

Prix pour un an (12 numéros) :
Paris, 7 fr. — Départements et Union postale, 8 fr. 50 c.
Les Tomes I à X (1894-1903) se vendent ensemble. 60 fr.
Les Tomes II à XI (1894-1904) se vendent chacun. 7 fr.
Le Tome I (1894) ne se vend pas séparément.

MÉMORIAL DES POUDRES ET SALPÊTRES, publié par les soins du Service des poudres et salpêtres, avec l'autorisation du Ministre de la Guerre. Grand in-8.

Le *Mémorial* paraît sous forme de Recueil périodique, en deux fascicules semestriels, et forme, tous les deux ans, un beau volume de 24 feuilles environ, avec figures.
Collection des Tomes I à X (1883-1900). (*Rare.*)
Chacun des Tomes III, V à X se vend séparément. 12 fr.
Les Tomes I, II et IV ne se vendent pas séparément.

Prix de l'abonnement pour un volume (4 fascicules) :
Paris...... .... 12 fr.
Départements et Union postale... 13 fr.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES. Journal des Candidats aux Écoles Polytechnique et Normale, rédigé par *C.-A. Laisant,* Docteur ès Sciences, Professeur à Sainte-Barbe, Répétiteur à l'École Polytechnique, *C. Bourlet,* Docteur ès Sciences, Professeur au Lycée Saint-Louis, et *Bricard,* Répétiteur à l'École Polytechnique. (Publication fondée en 1842 par *Gerono* et *Terquem,* et continuée par *Gerono, Prouhet, Bourget, Brisse, Rouché, Antomari* et *Duporcq.*) In-8, mensuel.

1re Série, 20 vol. in-8, années 1842 à 1861. 300 fr.
Les Tomes I à VII et XVI (1842-1848 et 1857) ne se vendent pas séparément. Les autres Tomes de la 1re Série se vendent séparément. 15 fr.
2e Série, 20 vol. in-8, années 1862 à 1881. 300 fr.
Les Tomes I à III, V et XIX (1862 à 1864, 1866, 1880) de la 2e Série ne se vendent pas séparément.
Les autres Tomes se vendent séparément. 15 fr.
3e Série, 19 vol. in-8, années 1882 à 1900. 285 fr.
Les Tomes I à XIX (1882 à 1900) de la 3e Série se vendent séparément. 15 fr.
La **4e Série,** commencée en 1901, continue de paraître chaque mois par cahier de 48 pages au moins.

Prix pour un an (12 numéros) :
Paris.. 15 fr. | Départements et Union postale. 17 fr.

REVUE ÉLECTRIQUE (La), publiée sous la direction de M. J. Blondin.

La *Revue électrique* paraît deux fois par mois, par fascicules de 32 pages in-4 (28 × 22). Elle forme par an 2 volumes de plus de 400 pages.

Prix de l'abonnement (24 numéros) :
Paris.......... .... 25 fr.
Départements....... .... 27 fr. 50 c.
Union postale........................ 30 fr.
Prix du numéro : 1 fr. 50 c.

Les Tomes I et II (1904) et III (1er semestre 1905) se vendent chacun 11 fr.

REVUE SEMESTRIELLE DES PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES, rédigée sous les auspices de la Société Mathématique d'Amsterdam. Grand in-8, paraissant en 2 fascicules (fondé en 1893).

Prix pour un an :
Paris, Départements et Union postale : 8 fr. 50 c.
Chacune des années antérieures, à partir de 1893 (sauf le Tome III). 8 fr. 50 c.
Tables des matières contenues dans les cinq premiers volumes (1893-1897), suivies d'une Table générale par noms d'auteurs. Grand in-8; 1897..................... 5 fr.
Table des matières contenues dans les cinq Volumes 1898-1902 suivie d'une *Table générale par noms d'auteurs.* Grand in-8; 1902. 7 fr. 50 c.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE PHOTOGRAPHIE. — Gr. in-8, bimensuel. (Fondé en 1855.)
2e Série.
1re Série, 30 volumes, années 1855 à 1884. 250 fr.
Chaque année de la **1re Série,** sauf le Tome I (1855) et les Tomes XVII à XXX (1871-1884). 12 fr.
Chaque numéro séparément............ 1 fr. 50 c.
Tables décennales par ordre de matières et par noms d'auteurs.
Tomes I à X (1855 à 1864)............ 1 fr. 50 c.
Tomes XI à XX (1865 à 1874).......... 1 fr. 50 c.

DENFER (**J.**), Architecte, Professeur à l'École Centrale. — **Couverture des édifices.** *Ardoises, tuiles, métaux, matières diverses, chéneaux et descentes.* Grand in-8 de 469 pages avec 423 figures; 1893. (E. T. P.) 20 fr.

DENFER (**J.**), Architecte, Professeur à l'École Centrale. — **Charpenterie métallique.** *Menuiserie en fer et serrurerie.* 2 volumes grand in-8. (E. T. P.)

Tome I : *Généralités sur la fonte, le fer et l'acier. — Résistance de ces matériaux. — Assemblage des éléments métalliques. — Chaînages, linteaux et poitrails. — Planchers en fer. — Supports verticaux. — Colonnes en fonte. Poteaux et piliers en fer.* Gr. in-8, de 584 pages et 479 fig.; 1894. 20 fr.

Tome II : *Pans métalliques. — Combles. — Passerelles et petits ponts. — Escaliers en fer. — Serrurerie : Ferrements des charpentes et menuiseries. — Paratonnerres. — Clôtures métalliques. — Menuiserie en fer. — Serres et vérandas.* Grand in-8 de 626 pages avec 571 figures; 1894. 20 fr.

FABRE (**C.**), Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse. — **Les Industries photographiques.** Un volume grand in-8 de 584 pages, avec 183 figures; 1904. (E. I.). 18 fr.

FÖPPL (**Aug.**), Professeur à l'Université technique de Mulhouse. — **Résistance des matériaux et éléments de la théorie mathématique de l'Elasticité.** Traduit de l'allemand par E. Hahn, Ingénieur diplômé de l'École Polytechnique de Zurich. Grand in-8 de 489 p., avec 74 figures; 1901. (E. I.) 15 fr.

GESCHWIND (**Lucien**), Ingénieur chimiste. — **Industries du sulfate d'aluminium, des aluns et des sulfates de fer.** *Étude théorique de l'aluminium, du fer et de leurs composés. Fabrication du sulfate d'aluminium, des aluns et des sulfates de fer. Applications industrielles des sulfates d'aluminium et de fer. Caractères analytiques du fer et de l'aluminium. Dosages. Méthodes d'analyse.* Grand in-8, de VIII-364 pages, avec 195 figures; 1899. (E. I.) 10 fr.

GESCHWIND (**L.**), Ingénieur-Chimiste, et **SELLIER** (**E.**), Chimiste, Lauréats des Chimistes de sucrerie et de la Société industrielle de Saint-Quentin. — **La betterave agricole et industrielle.** Grand in-8 de IV-668 pages avec 130 figures; 1902. (E. I.). 20 fr.

GOUILLY (**Alexandre**), Ingénieur des Arts et Manufactures, Répétiteur de Mécanique appliquée à l'École Centrale. — **Éléments et organes des machines.** Un vol. grand in-8 de 406 pages avec 710 fig.; 1894. (E. I.) 12 fr.

GUÉDON (**Pierre**), Ingénieur, Chef de traction à la Compagnie générale des Omnibus de Paris. — **Traité pratique des Chemins de fer d'intérêt local et des Tramways.** Grand in-8 de 393 pages avec 141 figures; 1901. (E. I.) 11 fr.

GUIGNET (**Ch.-Er.**), Directeur des teintures aux Manufactures nationales des Gobelins et de Beauvais; **DOMMER** (**F.**), Professeur à l'École de Physique et de Chimie industrielles de la ville de Paris, et **GRANDMOUGIN** (**E.**), Ancien préparateur à l'École de Chimie de Mulhouse. — **Blanchiment et apprêts. Teinture et impression. Matières colorantes.** Un volume grand in-8 de 674 pages, avec 345 figures et échantillons de tissus imprimés; 1895. (E. I.) 30 fr.

HENRY (**Ernest**), Inspecteur général des Ponts et Chaussées. — **Ponts sous rails et Ponts-routes à travées métalliques indépendantes. Formules, Barèmes et Tableaux.** Un volume grand in-8 de VIII-632 pages, avec 267 figures; 1894. (E. T. P.) 20 fr.

HIRSCH (**J.**), Inspecteur général honoraire des Ponts et Chaussées, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers. — **Résumé du Cours de machines à vapeur et Locomotives**, professé à l'École nationale des Ponts et Chaussées, 2e édition. Grand in-8 de 509 pages, avec 314 figures; 1898. (E. T. P.) 18 fr.

HUBERT-VALLEROUX (**P.**), Avocat à la Cour de Paris, Docteur en Droit. — **Les Associations ouvrières et les Associations patronales.** (Cet ouvrage a obtenu le premier prix au concours *de Chambrun*, 1898.) Grand in-8 de 361 pages; 1899. (E. I.) 10 fr.

JOANNIS (**A.**), Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux, Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Paris. — **Traité de Chimie organique appliquée.** (E. I.) 2 volumes grand in-8 se vendant séparément.
Tome I : Volume de 688 p., avec fig.; 1896. 20 fr.
Tome II : Volume de 718 p., avec fig.; 1896. 15 fr.

LAPPARENT (**Henri de**), Inspecteur général de l'Agriculture. — **Le vin et l'eau-de-vie de vin.** *Introduction. Influence des cépages, des climats, des sols, etc., sur la qualité du vin. Le raisin, les vendanges, vinification, cuveries et chais. Le vin après le décuvage. Eau-de-vie. Économie et législation.* Gr. in-8 de 542 p. avec 111 fig. et 28 cartes dans le texte; 1895. (E. I.) 12 fr.

LECHALAS (**Georges**), Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées. — **Manuel de droit administratif.** *Service des Ponts et Chaussées et des Chemins vicinaux.* 2 volumes grand in-8, se vendant séparément. (E. T. P.)

Tome I : *Notions sur les trois pouvoirs. Personnel des Ponts et Chaussées. Principes d'ordre financier. Travaux intéressant plusieurs services. Expropriations. Dommages et occupations temporaires.* Grand in-8 de CXLVII-536 pages; 1889. 20 fr.

Tome II (1re Partie) : *Participation des tiers aux dépenses des travaux publics. Adjudications. Fournitures. Régie. Entreprises. Concessions.* Gr. in-8 de 397 p.; 1893. 10 fr.

— IIe Partie : *Principes généraux de police : Grande voirie. Simple police. Roulage. — Domaine public : Consistance et condition juridique. Délimitation. Redevances et perceptions diverses. Produits naturels. Concessions. Occupations temporaires.* Gr. in-8; 1898. 10 fr.

LE VERRIER (**U.**), Ingénieur en chef des Mines, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers. — **Métallurgie générale.** Volumes grands in-8 (25×16) se vendant séparément :

— **Procédés de chauffage.** *Combustibles solides. Description des combustibles. Combustibles artificiels. Emploi des combustibles. Chauffage par l'électricité. Matériaux réfractaires. Organisation d'une usine métallurgique. Données numériques.* Volume de 367 pages avec 171 fig; 1902. (E. I.) 12 fr.

— **Métallurgie générale. Procédés métallurgiques et étude des métaux.** *Minerais. Séchage. Calcination. Grillage. Opérations extractives. Fusion et affinage. Thermochimie. Installations accessoires. Essais mécaniques. Action de la chaleur. Métallographie. Alliages annexes.* Volume de 403 pages, avec 194 figures; 1905. (E. I.) 12 fr.

LORENZ (**H.**), Ingénieur, Professeur à l'Université de Halle. — **Machines frigorifiques.** *Production et applications du froid artificiel.* Traduit de l'allemand par P. Petit, Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy, Directeur de l'École de Brasserie, et J. Jaquet, Ingénieur civil. Grand in-8 de IX-186 pages, avec 131 figures; 1898. (E. I.) 7 fr.

MARTENS (**A.**), Directeur du Laboratoire royal d'essais de Berlin-Charlottenbourg. — **Traité des essais des matériaux destinés à la construction des machines.** *Méthodes, Machines, Instruments de mesure.* Traduit de l'allemand avec Notes et Annexes, par Pierre Breuil, Chef de la Section des Métaux au Laboratoire d'essais du Conservatoire national des Arts et Métiers, ancien Directeur du Laboratoire d'essais de la Cie P.-L.-M. Grand in-8 (25×16) de 671 pages, avec 558 figures et atlas (25×16) de 31 planches; 1904. 50 fr.

MASONI (**U.**), Directeur et Professeur de l'Institut d'Hydraulique à l'École royale des Ingénieurs de Naples. —

Pour recevoir l'Ouvrage franco dans les pays de l'Union postale, ajouter 1 fr.

Le volume pour l'année 1907 paraîtra dans le cours de 1905.

— **EXTRAIT DE LA CONNAISSANCE DES TEMPS, à l'usage des Écoles d'Hydrographie et des marins du Commerce, pour l'an 1906,** publiée depuis l'an 1889 par le *Bureau des Longitudes.* Grand in-8; 1905. 1 fr. 50 c.

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, publié par le Conseil d'instruction de cet établissement.

Iʳᵉ Série, 64 Cahiers in-4, avec figures et pl..... 1000 fr.

Table des matières et noms d'auteurs **des 64 Cahiers de la Iʳᵉ Série. In-4; 1896.** 3 fr.

IIᵉ Série. Cahiers I à III, 1895 à 1897, chaque Cahier. 10 fr.
IVᵉ Cahier, 1898. 13 fr.
Vᵉ et VIᵉ Cahiers, 1900, 1901, chaque Cahier. 10 fr.
VIIᵉ Cahier, 1902. 12 fr.
VIIIᵉ Cahier, 1903. 10 fr.
IXᵉ Cahier, 1904. 10 fr.
Xᵉ Cahier, 1905. 10 fr.

VIII. — ENCYCLOPÉDIE DES TRAVAUX PUBLICS, ET ENCYCLOPÉDIE INDUSTRIELLE,

FONDÉES PAR M.-C. LECHALAS,
Inspecteur général
des Ponts et Chaussées en retraite.

ALHEILIG, Ingénieur de la Marine, Ex-Professeur à l'École d'application du Génie maritime, et **ROCHE (Camille),** Industriel, ancien Ingénieur de la Marine. — **Traité des machines à vapeur,** rédigé conformément au programme du *Cours de machines à vapeur de l'École Centrale.* Deux volumes grand in-8°, se vendant séparément. (E. I.)

Tome I : *Thermodynamique théorique et applications. La machine à vapeur et les métaux qui y sont employés. Puissance des machines, diagrammes indicateurs. Freins. Dynamomètres. Calcul et dispositions des organes d'une machine à vapeur. Régulation, épures de détente et de régulation. Théorie des mécanismes de distribution, détente et changement de marche. Condensation, alimentation. Pompes de service.* Vol. de xi-604 p., avec 412 fig.; 1895. 20 fr.

Tome II : *Forces d'inertie. Moments moteurs. Volants. Régulateurs. Description et classification des machines à vapeur. Machines marines. Moteurs à gaz, à pétrole et à air chaud. Graissage, joints et presse-étoupes. Montage des machines. Essais des moteurs. Passation des marchés. Prix de revient d'exploitation et de construction. Annexe : Note sur les servo-moteurs. Tables numériques.* Volume de iv-560 pages, avec 281 figures; 1805. 18 fr.

APPERT (Léon) et HENRIVAUX (Jules), Ingénieurs. — **Verre et verrerie.** Grand in-8, de 460 pages avec 130 fig. et un Atlas de 14 planches in-4; 1894 (E. I.). 20 fr.

Historique. Classification. Composition. Action des agents physiques et chimiques. Produits réfractaires. Fours de verrerie. Combustibles. Verres ordinaires. Glaces et produits spéciaux. Verres de Bohême. Cristal. Verres d'optique. Phares. Strass. Émail. Verres colorés. Mosaïque. Vitraux. Verres durs. Verres malléables. Verres durcis par la trempe. Étude théorique et pratique des défauts du verre.

BEAUVERIE (J.), Docteur ès sciences, chargé d'un Cours et des Travaux pratiques de Botanique appliquée à l'Université de Lyon, Préparateur de Botanique générale. — **Le Bois.** *Structure. Rapports entre la structure et les qualités du bois d'œuvre. Composition et propriétés chimiques. Caractères et propriétés physiques. Production des bois. La forêt. Abatage des bois. Altérations et défauts des bois d'œuvre. Conservation des bois. Étude spéciale des bois utiles et des essences qui les produisent. Bois indigènes et bois exotiques. Le liège. La production du bois dans le monde. Bois des colonies françaises. Utilisation des bois.* Avec une Préface de M. Daubrée, Conseiller d'État, Directeur général des Eaux et Forêts au Ministère de l'Agriculture. Un volume en deux fascicules grand in-8 (25 × 16) de xi-1402 p., avec 485 fig. (E. I.); 1905. 20 fr.

BOURRY, Ingénieur des Arts et Manufactures. — **Traité des industries céramiques.** *Terres cuites. Produits réfractaires. Faïences. Grès. Porcelaines.* Gr. in-8 de 755 pages avec 349 figures; 1897. (E. I.) 20 fr.

BRICKA (C.), Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées, Ingénieur en Chef de la voie et des bâtiments aux Chemins de fer de l'État. — **Cours de chemins de fer** *profrssé à l'École nationale des Ponts et Chaussées.* 2 beaux volumes grand in-8 se vendant séparément (E. T. P.).

Tome I : *Études. — Construction. — Voie et appareils de voie.* Volume de viii-634 pages. Avec 326 figures; 1894. 20 fr.

Tome II : *Matériel roulant et Traction. — Exploitation technique, Tarifs. — Dépenses de construction et d'exploitation. — Régime des concessions. Chemins de fer de systèmes divers.* Volume de 709 p. Avec 177 figures; 1894. 20 fr.

COLSON (C.), Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Conseiller d'État. — **Cours d'Économie politique** professé à l'École nationale des Ponts et Chaussées, 3 vol. grand in-8 se vendant séparément (E. T. P.).

Tome I : *Exposé général des Phénomènes économiques. Le travail et les questions ouvrières.* Volume de 596 p.; 1901. 10 fr.

Tome II : *La propriété des biens corporels et incorporels. Le Commerce et la circulation.* Volume de 774 pages; 1903. 10 fr.

Tome III : *Les finances publiques et plus particulièrement les finances françaises. Les travaux publics.*
(*En préparation.*)

CRONEAU (A.), Ingénieur de la Marine, Professeur à l'École d'application du Génie maritime. — **Architecture navale. — Construction pratique des navires de guerre.** 2 volumes grand in-8 et un Atlas de 11 planches (E. I.)

Tome I : *Plans et devis. — Matériaux. — Assemblages. Différents types de navires. — Charpente. — Revêtement de la coque et des ponts.* Grand in-8, de 339 pages avec 305 figures et un Atlas de 11 planches in-4 doubles dont 2 en trois couleurs; 1894. 18 fr.

Tome II : *Compartimentage. — Cuirassement. — Pavois et garde-corps. — Ouvertures pratiquées dans la coque, les ponts et les cloisons. — Pièces rapportées sur la coque. — Ventilation. — Service d'eau. — Gouvernails. — Corrosion et salissure. — Poids et résistance des coques.* Grand in-8 de 616 pages, avec 359 figures; 1894. 15 fr.

DEHARME (E.), Ingénieur de la Compagnie du Midi, Professeur du Cours de Chemins de fer à l'École Centrale, et **PULIN (A.),** Ingénieur des Arts et Manufactures, Inspecteur principal du Chemin de fer du Nord. — **Chemins de fer. Matériel roulant. Résistance des trains. Traction.** Un volume grand in-8 de xxii-441 pages, avec 95 figures et 1 planche; 1895 (E. I.). 15 fr.

— **Étude de la Locomotive. La Chaudière.** Gr. in-8 de vi-608 p., avec 131 fig. et 2 pl.; 1900 (E. I.) 15 fr.

— **Étude de la Locomotive. Mécanisme. Châssis. Types de machines.** Un volume grand in-8 de iv-712 p., avec 288 fig. et un atlas in-4 de 18 pl.; 1903 (E. I.). 25 fr.

Launay (**L. de**), Ingénieur en chef des Mines. — *Formation des gîtes métallifères ou métallogénie.* 2e édition (3 fig.).

Duquesnay, Directeur des manufactures de l'État. — *Résistance des matériaux.* 3e édition (29 fig.).

Granderye (**L.-M.**), Ingénieur chimiste. — *L'industrie de l'or* (15 fig.).

Périssé (**R.**), Ingénieur agronome. — *Le chauffage des habitations par les calorifères* (35 fig.).

Brunswick (**E.-J.**), Ingénieur électricien, et **Aliamet**, Ingénieur au chemin de fer du Nord. — *Construction des induits à courants continus. Manuel du bobinier* (53 fig.).

SECTION DU BIOLOGISTE.

Étard (**A.**), Examinateur des élèves à l'École Polytechnique. *Les nouvelles théories chimiques.* 3e édition (58 fig.).

Levaditi (**Dr C.**). — *La nutrition dans ses rapports avec l'immunité.*

Labit (**Dr H.**), Médecin principal de l'Armée, Membre de la société de Médecine publique et de Génie sanitaire, Lauréat de l'Académie de Médecine et de la Société d'Anthropologie. — *L'eau potable et les maladies infectieuses.*

Bodin (**E.**), Professeur de Bactériologie à l'Université de Rennes. — *Biologie générale des bactéries.*

Delobel (**J.**), Docteur en Médecine. — *L'hygiène scolaire.*

Chatin (**A.**), Ancien Préparateur à l'hôpital Saint-Louis, Membre de la Société de Dermatologie, et **Tremolières** (**F.**), ancien Interne de l'hôpital Saint Louis, Internes des Hôpitaux. — *La Pelade* (10 fig.).

Labbé (**H.**), Chef de Laboratoire à la Faculté de Médecine de Paris. — *Analyse chimique du sang* (3 fig.).

Mathieu (**Albert**), Médecin de l'Hôpital Andral, et **Roux** (**Jean-Ch.**), Ancien interne des Hôpitaux. — *L'inanition chez les dyspeptiques et les nerveux. Séméiologie et traitement.*

Schlœsing (**Th.**) **fils**, Membre de l'Institut. — *Principes de Chimie agricole*, 3e édition.

Bodin (**E.**), Professeur de Bactériologie à l'Université de Rennes. — *Les bactéries de l'air, de l'eau et du sol* (2 fig.)

Kayser (**Edmond**), Ingénieur agronome. — *Les levures caractères morphologiques et physiologiques. Applications des levures sélectionnées* (23 fig.).

Charrin (**A.**), Médecin des hôpitaux de Paris. — *Les poisons de l'organisme. Poisons du tube digestif.* 2e édition.

Bérard (**L.**), Chirurgien des Hôpitaux, et **Potel** (**M.**), Professeur agrégé à la Faculté de Médecine de Lyon. — *Les formes chirurgicales de la tuberculose intestinale.*

Berthault (**F.**), Professeur à l'École nationale d'Agriculture de Grignon. — *Les prairies. Prairies artificielles et prairies temporaires* (10 fig.).

(Juillet 1905.)

CORRESPONDANCE D'HERMITE ET DE STIELTJES

PUBLIÉE PAR LES SOINS

DE

B. BAILLAUD,
Doyen honoraire de la Faculté des Sciences,
Directeur de l'Observatoire de Toulouse.

H. BOURGET,
Maître de Conférences à l'Université
Astronome adjoint
à l'Observatoire de Toulouse.

Avec une Préface de Émile PICARD,
Membre de l'Institut.

DEUX VOLUMES GRAND IN-8 (25 × 16) SE VENDANT SÉPARÉMENT.

Tome I (8 novembre 1882 — 22 juillet 1889), Volume de xx-477 pages avec deux portraits; 1905 .... **16 fr.**
Tome II (18 octobre 1889 — 15 décembre 1894), Volume de vi-457 pages avec un portrait; 1905 .... **16 fr.**

Introduction.

On sait quelle place tint dans la vie scientifique d'Hermite sa correspondance avec des savants français et étrangers. C'était pour lui un délassement que de se livrer en toute confiance à de longues causeries épistolaires, heureux tout à la fois de faire profiter ses amis et ses élèves des remarques suggestives auxquelles l'avaient conduit ses réflexions, et de solliciter des éclaircissements en se faisant écolier. D'ailleurs, même pour les Mémoires publiés dans les journaux scientifiques, la forme épistolaire avait toujours eu sa prédilection. Ses travaux ont souvent paru sous forme de lettres, rappelant le nom de ses nombreux correspondants; il trouvait ainsi moyen d'associer la science et l'amitié.

Aucune correspondance d'Hermite ne fut plus suivie ni plus abondante que celle qu'il avait commencée en 1882 avec un astronome adjoint de l'Observatoire de Leyde, Thomas Stieltjes. Le souci des mêmes problèmes et une même tournure d'esprit attirèrent Hermite vers Stieltjes, et une vive sympathie s'établit vite entre le jeune débutant et le vétéran de la Science. La mort de Stieltjes, arrivée prématurément en 1894, put seule interrompre cette correspondance, unique peut-être dans l'histoire de la Science. Relisant, après ce triste événement, la longue série de lettres du géomètre éminent pour qui il avait une si affectueuse estime, Hermite pensa qu'il importait à la mémoire de Stieltjes que ce témoignage de son activité et de son génie mathématiques ne disparût point. Il était impossible de publier les lettres de Stieltjes sans publier celles d'Hermite.

tant leur collaboration avait été intime; les amis de Stieltjes eurent ici à vaincre quelque résistance d'Hermite, qui finit cependant par se décider à laisser paraître l'ensemble de la Correspondance. M. Gauthier-Villars voulut bien se charger de cette publication.

M. Baillaud et M. H. Bourget, qui avaient beaucoup connu et beaucoup aimé leur collègue de la Faculté des Sciences de Toulouse, entreprirent tout d'abord la collation des lettres et firent quelques coupures nécessaires. Prenant à cœur la perfection de cette édition, ils reprirent ensuite les calculs, là où il leur parut nécessaire, et ajoutèrent des Notes et des éclaircissements. Le manuscrit était presque entièrement prêt à la mort d'Hermite, qui avait suivi le travail de revision. Tous les amis et les admirateurs d'Hermite et de Stieltjes remercieront MM. Baillaud et Bourget du soin et du dévouement qu'ils ont apportés à cette œuvre.

Il manque, hélas! une chose. Hermite avait promis d'écrire une Introduction où il eût mis sans doute en pleine lumière l'originalité du talent de Stieltjes. Il n'appartient à personne de tenir aujourd'hui la plume à sa place. L'affinité mathématique était complète entre ces deux grands esprits. Une grande partie de la Correspondance a un caractère arithmétique; c'est le *vir arithmeticus*, comme aurait dit Jacobi, qu'Hermite affectionnait surtout en Stieltjes. Cet arithméticien ne reste pas seulement sur les sommets à contempler les choses de loin et de haut; il descend dans le fond des vallées et y recueille des applications numériques d'où il sait ensuite tirer des remarques générales. Quelle joie ce fut pour Hermite que de rencontrer un correspondant si perspicace s'intéressant aux questions d'approximations, auxquelles il avait lui-même consacré une grande partie de son labeur scientifique, en particulier aux quadratures approchées et aux fractions continues algébriques. On retrouve chez Stieltjes, à l'apogée de son talent, le calculateur qu'il avait été jadis à l'Observatoire de Leyde; c'est un des côtés de son originalité.

On est émerveillé aussi de la rapidité avec laquelle il répond aux questions que lui pose Hermite et trouve des démonstrations ingénieuses et profondes aux théorèmes qui lui sont énoncés. Nous voyons en même temps le champ de ses études s'agrandir peu à peu; ses recherches sur une transcendante envisagée par Riemann le font pénétrer profondément dans la théorie des fonctions. Que de beaux travaux il eût faits encore en portant dans cette voie ses préoccupations arithmétiques et algébriques, si sa carrière n'avait pas été si prématurément brisée! C'est ce dont témoigne assez son dernier Mémoire, sur les fractions continues algébriques, qui est assurément un chef-d'œuvre.

La Correspondance d'Hermite et de Stieltjes n'intéressera pas seulement les analystes. En même temps que deux géomètres de premier ordre, on y voit deux beaux caractères. Quelle simplicité et quelle franchise entre le maître et le disciple, ou plutôt entre les deux amis! Quelle confiance affectueuse chez l'un et chez l'autre! On est réconforté par la lecture de ces pages, où ne se mêle aucune préoccupation personnelle, et où chacun va jusqu'au bout de sa pensée. Il semble aussi, et c'est une curieuse impression laissée par ces lettres, que sous cette forme plus personnelle le langage abstrait de l'Analyse perde de sa sécheresse et que la Mathématique y devienne plus humaine. On n'oubliera pas enfin que c'est à l'amitié développée par cette correspondance que nous devons de pouvoir compter Thomas Stieltjes parmi les géomètres les plus éminents de la seconde moitié du XIXe siècle.

Emile Picard

37050 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

APPELL (Paul), Membre de l'Institut. — **Traité de Mécanique rationnelle** (COURS DE MÉCANIQUE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES), 3 volumes grand in-8, se vendant séparément.

TOME I : *Statique. Dynamique du point*, avec 178 figures, 2e édition; 1902 .... 18 fr.

TOME II : *Dynamique des systèmes. Mécanique analytique*, avec 99 figures; 2e édition, 1904 .... 16 fr.

TOME III : *Équilibre et mouvement des milieux continus*, avec 70 figures; 1902 .... 17 fr.

BOREL (Émile), Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — **Collection de monographies sur la Théorie des fonctions**, publiée sous la direction de ÉMILE BOREL.

Leçons sur la théorie des fonctions (Éléments de la théorie des ensembles et applications), par ÉMILE BOREL, 1898 .... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions entières, par ÉMILE BOREL; 1900 .... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les séries divergentes, par ÉMILE BOREL; 1901 .... 4 fr. 50 c.

Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France par ÉMILE BOREL, recueillies et rédigées par *Robert d'Adhémar*; 1902. 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions méromorphes, professées au Collège de France par ÉMILE BOREL, recueillies et rédigées par *Ludovic Zoretti*; 1903. 3 fr. 50 c.

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France par HENRI LEBESGUE, 1904 .... 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, professées à l'École Normale supérieure par ÉMILE BOREL et rédigées par *Maurice Fréchet*, avec des Notes par PAUL PAINLEVÉ et HENRI LEBESGUE; 1905 .... 4 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France, par RENÉ BAIRE, rédigées par *A. Denjoy*; 1905 .... 3 fr. 50 c.

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par ERNST LINDELÖF; 1905 .... 3 fr. 50 c.

Quelques principes fondamentaux de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, par PIERRE COUSIN .... (*En préparation.*)

Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, par ÉMILE BOREL .... (*En préparation.*)

Leçons sur les Correspondances entre variables réelles, par JULES DRACH .... (*En préparation.*)

Principes de la théorie des fonctions entières de genre infini, par OTTO BLUMENTHAL .... (*En préparation.*)

Leçons sur les séries trigonométriques, par HENRI LEBESGUE. (*En pr.*)

FRENET, Professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Lyon. — **Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal**. Ouvrage destiné aux Candidats à l'École Polytechnique, à l'École Normale, aux Élèves de ces Écoles et aux aspirants à la Licence ès Sciences mathématiques. Nouveau tirage augmenté d'un *Appendice sur les résidus, les fonctions elliptiques, les équations aux dérivées partielles, les équations aux différentielles totales*, par H. LAURENT, Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. In-8, avec figures; 1904 .... 8 fr.

FREYCINET (C. de), de l'Institut. — **De l'expérience en Géométrie.** Volume in-8 de XX-175 pages; 1903 .... 4 fr.

GOURSAT (Édouard), Professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — **Cours d'Analyse mathématique.** 2 volumes grand in-8 se vendant séparément.

TOME I : *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en séries. Applications géométriques.* Grand in-8 de VI-620 pages, avec 52 figures; 1902 .... 20 fr.

TOME II : *Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments de calcul des variations.* Un premier fascicule (304 pages) est paru. Prix du Tome II complet pour les souscripteurs .... 20 fr.

HUMBERT (G.), Membre de l'Institut, Professeur de l'Écol[e Polytech]nique. **Cours d'Analyse professé à l'École Polytechnique** [...] grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément :

TOME I : *Calcul différentiel. Principes du calcul intégral.* [...] *géométriques.* Avec 111 figures; 1903 ....

TOME II : *Complément du calcul intégral. Fonctions a*[...] *elliptiques. Équations différentielles.* Avec 91 figures; [...]

JORDAN (Camille), Membre de l'Institut, Professeur à l'Éco[le Polytech]nique. — **Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.** 2e é[dition, entiè]rement refondue. 3 volumes in-8, avec figures, se vendant [...]

TOME I : *Calcul différentiel*; 1893 ....

TOME II : *Calcul intégral (Intégrales définies et indéfin*[...] 1894 ....

TOME III : *Calcul intégral (Équations différentielles)*; [...]

JOUFFRET (E.), Lieutenant-Colonel d'Artillerie en retraite, [...] de l'École Polytechnique. — **Traité de Géométrie à quatre** [...] **et Introduction à la Géométrie à *n* dimensions.** Grand [...] 201 pages avec 65 figures; 1903 ....

PICARD (Émile), Membre de l'Institut, Professeur à la [...] Sciences. — **Traité d'Analyse** (Cours de la Faculté de[...] Quatre volumes grand in-8 avec figures, se vendant sépa[rément].

TOME I : *Intégrales simples et multiples. — L'équation de* [...] *ses applications. Développement en séries. — Applications g*[...] *du Calcul infinitésimal.* 2e édition, revue et corrigée, avec [...] 1901 ....

TOME II : *Fonctions harmoniques et fonctions analytique*[...] *duction à la théorie des équations différentielles. Intégral*[...] *et surfaces de Riemann.* 2e édition, revue et augmentée, avec [...] 1905 ....

TOME III : *Des singularités des intégrales et des équations di*[...] *Étude du cas où la variable reste réelle et des courbes défi*[...] *équations différentielles. Équations linéaires; analogie entre l*[...] *algébriques et les équations linéaires.* Avec 25 figures; 1896 [...]

TOME IV : *Équations aux dérivées partielles* .... (*En p*[...]

ROUCHÉ (Eugène), Membre de l'Institut, Professeur au Conse[rvatoire des] Arts et Métiers, Examinateur de sortie à l'École Polyte[chnique], et **LEVY (Lucien)**, Répétiteur d'Analyse et Examinateur d'[...] l'École Polytechnique. — **Analyse infinitésimale** *à l'usage* [...] *nieurs.* 2 volumes grand in-8 se vendant séparément :

TOME I : **Calcul différentiel.** *Dérivées et différentielles.* [...] *de variables. Séries. Formules de Taylor. Courbes plane*[...] *Surfaces. Congruences. Complexes. Lignes tracées sur* [...] Volume grand in-8 de VIII-557 pages, avec 45 figures; 1900 [...]

TOME II : **Calcul intégral.** *Intégrales indéfinies et défi*[...] *de Fourier. Fonctions elliptiques. Équations différentielle*[...] *et aux dérivées partielles. Calcul des variations.* Volume [...] de VII-648 pages; 1903 ....

STOFFAES (l'abbé), Professeur à la Faculté catholique des [Sciences de] Lille. — **Cours de Mathématiques supérieures** à l'usage d[es candidats] à la Licence ès sciences physiques. 2e édition. In-8, av[ec ...] 1903 ....

STURM, Membre de l'Institut. — **Cours d'Analyse de l'École [Polytech]nique**, revu et corrigé par *E. Prouhet*, Répétiteur d'Analy[se à l'École] Polytechnique, et augmenté de la **Théorie élémentaire des [fonctions] elliptiques**, par *H. Laurent*, répétiteur à l'École Polytechn[ique ... édi]tion, mise au courant des nouveaux programmes de la [Licence, par] *A. de Saint-Germain*, Professeur à la Faculté des Scien[ces ...] 2 volumes in-8, avec figures dans le texte; 1901.

Broché .... 15 fr. | Cartonné .... 1[...]

35069 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

JOURNAL



DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PUBLIÉ

PAR LE CONSEIL D'INSTRUCTION

DE CET ÉTABLISSEMENT.

II[e] SÉRIE. — ONZIÈME CAHIER.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1906



EXTRAIT DU CATALOGUE

DE LA LIBRAIRIE

GAUTHIER-VILLARS.

DIVISIONS DU CATALOGUE

I. — OUVRAGES SUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUES.

ABRAHAM (Henri), Maître de conférences à l'École Normale supérieure, Secrétaire général de la Société française de Physique. — **Recueil d'expériences élémentaires de Physique**, publié avec la collaboration de nombreux physiciens. Deux volumes in-8 (23 × 14).

Ire Partie : *Travaux d'atelier. Géométrie et Mécanique. Hydrostatique. Chaleur.* Vol. de XII-247 pages avec 260 figures; 1904.
Broché.... 3 fr. 75 c. | Cartonné toile.... 5 fr.

IIe Partie : *Acoustique, Optique, Électricité et Magnétisme.* Vol. de XII-454 pages avec 424 figures; 1904.
Broché.... 6 fr. 25 c. | Cartonné.... 7 fr. 50 c.

ABRAHAM (Henri) et **LANGEVIN** (Paul). — **Les quantités élémentaires d'électricité : Ions, Électrons, Corpuscules.** Volume grand in-8 (25 × 16) de XVI-1144 pages avec nombreuses figures; 1905. (*Collection de Mémoires publiée par la Société française de Physique.*) 35 fr.

ANDOYER (H.), Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris. — **Leçons sur la Théorie des Formes et la Géométrie analytique supérieure**, *à l'usage des étudiants des Facultés des Sciences.* Volume de VI-508 p.; 1900. 15 fr.

ANDRÉ (Ch.), Directeur de l'Observatoire de Lyon, Professeur d'Astronomie à l'Université de Lyon. — **Traité d'Astronomie stellaire.** 2 vol. grand in-8 se vendant séparément :

Ire Partie : *Étoiles simples.* Avec 29 figures et 2 planches; 1899. 9 fr.

IIe Partie : *Étoiles doubles et multiples, amas stellaires.* Avec 74 figures et 3 planches; 1900. 14 fr.

ANDRÉ (Désiré), ancien Élève de l'École Normale supérieure. — **Liste et Résumé de mes principaux travaux mathématiques.** Grand in-8 (25 × 16) de 106 pages; 1904. 4 fr.

ANGOT (A.), Météorologiste titulaire au Bureau Central météorologique. — **Traité élémentaire de Météorologie.** 2e édition. In-8 (25 × 16) de 412 pages avec 105 figures et 4 planches; 1906. 12 fr.

ANGOT (A.). — **Instructions météorologiques.** 4e édition, entièrement refondue. Gr. in-8, avec figures et 4 planches, suivi de nombreuses Tables pour la réduction des observations; 1903. 4 fr. 50 c.

ANGOT (Alfred). — **Abrégé des Instructions météorologiques.** In-8, avec figures; 1903. 1 fr. 50 c.

APPELL (P.), Membre de l'Institut, et **CHAPPUIS** (J.), Professeur à l'École Centrale. — **Leçons de Mécanique élémentaire**, conformes aux programmes de 1902 et de 1905. 2 volumes in-16 se vendant séparément.

I. *Volume à l'usage des élèves de la classe de Première C et D* avec 76 figures. 2e édition; 1905. 2 fr. 75 c.

II. *Volume à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques A et B*, 2e édition avec 101 fig.; 1907. 3 fr. 25 c.

APPELL (P.), Membre de l'Institut. — **Cours de Mécanique à l'usage des Élèves de la classe de Mathématiques spéciales**, conforme au programme du 27 juillet 1904. In-8, avec 185 figures. 2e édition; 1905. 12 fr.

APPELL (Paul), Membre de l'Institut. — **Traité de Mécanique rationnelle** (Cours de Mécanique de la Faculté des Sciences). 3 volumes grand in-8, se vendant séparément.

Tome I. — *Statique. Dynamique du point.* 2e édition entièrement refondue. Avec 178 figures; 1902. 18 fr.

Tome II. — *Dynamique des systèmes. Mécanique analytique.* 2e édition entièrement refondue, avec 99 figures; 1904. 16 fr.

Tome III. — *Équilibre et mouvement des milieux continus.* Avec 70 figures; 1902. 17 fr.

APPELL (P.). — **Éléments d'Analyse mathématique** *à l'usage des ingénieurs et des physiciens.* (Cours professé à l'École centrale des Arts et Manufactures). 2e édition. Grand in-8 (25 × 16) de VII-714 p., avec 219 fig., cartonné à l'anglaise; 1905. 24 fr.

ARMAGNAT (H.). — **La Bobine d'induction.** In-8 (23 × 14) de VI-223 p., avec 109 fig., cart.; 1905. 5 fr.

ARNAUDEAU (A.), Ingénieur civil, ancien Élève de l'École Polytechnique. — **Tables des intérêts composés, annuités et amortissements** *pour des taux variant de dixièmes en tixièmes et des époques variant de 100 à 400 suivant les taux.* Avec une Préface de A. Achard. Grand in-8 (28 × 19) de XII-(15)-125 pages; 1906. 10 fr.

ARNOUX (Gabriel), ancien Officier de Marine. — **Essais de Psychologie et de Métaphysique positives.** — **Arithmétique graphique.** 2 volumes grand in-8 (25 × 16), se vendant séparément.

— *Les espaces arithmétiques hypermagiques.* Avec nombreuses figures et 1 planche en couleurs.
Vélin........... 6 fr. | Papier hollande. 8 fr.

— *Introduction à l'étude des fonctions arithmétiques,* avec 65 figures; 1906. 7 fr. 50 c.

ATLAS PHOTOGRAPHIQUE DE LA LUNE, publié par **l'Observatoire de Paris,** exécuté par M. Lœwy, Directeur de l'Observatoire, et P. Puiseux, Astronome adjoint à l'Observatoire. 8 fascicules 1896-1897-1898-1899-1900-1902-1903-1904.

Chaque fascicule comprend un volume in-4 de 40 à 60 p. et un Atlas de 6 ou 7 pl. in-folio (64 × 80). Prix de chaque fascicule. 30 fr.

AUERBACH (Dr Félix), Professeur à l'Université d'Iéna. — **La Dominatrice du Monde et son ombre.** *Conférence sur l'énergie et l'entropie.* Édition française publiée avec l'assentiment de l'auteur par le Dr E. Robert-Tissot, médecin à La Chaux-de-Fonds (Suisse). Préface de Ch.-Ed. Guillaume, Directeur adjoint du Bureau international des Poids et mesures. In-16 (19 × 12) de XV-86 pages; 1905. 2 fr. 75 c.

AUTONNE (Léon), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Maître de conférences à la Faculté des Sciences de l'Université de Lyon. — **Sur les formes mixtes.** Gr. in-8 (25 × 16) de 195 pages avec figures; 1905. 8 fr.

BARBARIN (P.), Professeur de Mathématiques supérieures au lycée de Bordeaux. — **Géométrie non euclidienne.** 1 vol. in-8 écu (20 × 13) de 80 pages, avec 19 figures et 3 planches hors texte, cartonné (*C. S.*); 1902. 2 fr.

BERTHELOT (M.), Sénateur, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur au Collège de France. — **Les carbures d'hydrogène (1851-1901).** *Recherches expérimentales.* Trois volumes grand in-8; 1901, se vendant ensemble. 45 fr.

BERTHELOT (M.). — **Traité pratique de Calorimétrie chimique.** 2e édition, revue, corrigée et augmentée. Vol. in-8 (23 × 14) de XIII-317 p., avec 27 fig.; 1905. 6 fr.

BERTHELOT (M.). — **Archéologie et Histoire des Sciences;** avec publication nouvelle du Papyrus grec chimique de Leyde et impression originale du Liber de Septuaginta de Geber. In-4 (28 × 23) de 377 pages avec 8 figures; 1906. 12 fr.

BERTHELOT (M.). — **Traité pratique de l'analyse des gaz.** Grand in-8 (25 × 16) de IX-483 pages avec 109 figures; 1906. 17 fr.

BESSON (Paul), Ingénieur des Arts et Manufactures. — **Le Radium et la Radioactivité.** *Propriétés générales. Emplois médicaux.* In-16 (19 × 12) de IV-170 pages environ, avec 23 figures; 1904. 2 fr. 75 c.

BIGOURDAN (G.). — **Les éclipses de Soleil.** *Instructions sommaires sur les observations que l'on peut faire pendant ces éclipses.* Un volume in-8 (23 × 14) de 167 pages, avec 40 figures; 1905. 3 fr. 50 c.

BLONDLOT (R.), Correspondant de l'Institut, Professeur à l'Université de Nancy. — **Rayons « N ».** Recueil des Communications faites à l'Académie des Sciences avec des *Notes complémentaires* et avec Instruction pour la confection des écrans phosphorescents. In-16 (19 × 12) de VI-78 pages, avec figures, 1 planche et 1 écran phosphorescent; 1904. 2 fr.

BOLTZMANN (L.), Professeur à l'Université de Leipzig. — **Leçons sur la théorie des gaz,** avec une *Introduction* et des *Notes* de M. Brillouin, Professeur au Collège de France. 2 volumes grand in-8.

Ire Partie, traduite par *A. Gallotti,* ancien Élève de l'École Normale supérieure, Professeur au Lycée d'Orléans, avec figures; 1902. 8 fr.

IIe Partie, traduite par *A. Gallotti* et *H. Bénard,* anciens Élèves de l'École Normale, avec figures; 1905. 10 fr.

BOREL (Émile), Maître de Conférences à l'École Normale supérieure. — **Collection de monographies sur la Théorie des fonctions,** publiée sous la direction de E. Borel. Volumes grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément.

Leçons sur la théorie des fonctions (*Éléments de la théorie des ensembles et applications*), par Émile Borel; 1898. 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions entières, par E. Borel; 1900. 3 fr. 50 c.

Leçons sur les séries divergentes, par E. Borel; 1901. 4 fr. 50 c.

Leçons sur les séries à termes positifs, professées au Collège de France, par E. Borel, recueillies et rédigées par Robert d'Adhémar; 1902. 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions méromorphes, professées au Collège de France, par E. Borel, recueillies et rédigées par Ludovic Zoretti; 1903. 3 fr. 50 c.

Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, professées au Collège de France, par Henri Lebesgue, 1904. 3 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions de variables réelles et leur représentation par des séries de polynomes, professées à l'École Normale supérieure par Émile Borel et rédigées par Maurice Fréchet, avec des Notes de Paul Painlevé et Henri Lebesgue. Volume de VIII-160 p., avec 8 figures; 1905. 4 fr. 50 c.

Leçons sur les fonctions discontinues, professées au Collège de France, par René Baire, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier, et rédigées par *A. Denjoy,* Élève de l'École Normale supérieure. Volume de VIII-128 pages; 1905. 3 fr. 50 c.

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions, par Ernst Lindelöf; 1905. 3 fr. 50 c.

Leçons sur les séries trigonométriques, professées au Collège de France par Henri Lebesgue; 1906 3 fr. 50 c.

BOSSERT (J.), Astronome à l'Observatoire de Paris. — **Catalogue d'étoiles brillantes** *destiné aux Astronomes, Voyageurs, Ingénieurs et Marins.* In-4 (28 × 22,5) de XV-75 pages; 1906. 7 fr. 50 c.

BOUASSE (H.), Professeur de Physique à l'Université de Toulouse. — **Mécanique : Essai des matériaux.** *Notions fondamentales relatives aux déformations élastiques et permanentes.* Grand in-8 (25 × 16) de 150 pages avec 54 figures; 1905. 5 fr.

BOUASSE (H.). — **Bases physiques de la musique** In-8 écu (20 × 13) de 112 pages avec 8 figures; 1906 Cartonné. 2 fr.

BOURDON. — **Application de l'Algèbre à la Géométrie**, comprenant la Géométrie analytique à deux et à trois dimensions. 9[e] édition, revue et annotée par *Gaston Darboux*. In-8, avec pl. (nouveau tirage); 1906 (*Adopté par l'Université*.) 9 fr.

BOUSSINESQ (J.), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Théorie analytique de la chaleur**, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la Théorie mécanique de la Lumière. (COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.) Deux volumes grand in-8 se vendant séparément.

TOME I : *Problèmes généraux*. Volume de XXVII-333 pages avec 14 figures; 1901. 10 fr.

TOME II : *Refroidissement et échauffement par rayonnement. Conductibilité des tiges, lames et masses cristallines. Courants de convection. Théorie mécanique de la lumière*. Volume de XXXII-625 pages; 1903. 18 fr.

BOUTY (E.), Professeur à la Faculté des Sciences. — **Radiations. Electricité. Ionisation.** Troisième Supplément au *Cours de Physique* de JAMIN et BOUTY. In-8 de VI-419 pages, avec 104 figures; 1906. 8 fr.

BRILLOUIN (Marcel), Professeur au Collège de France. — **Leçons sur la Viscosité des liquides et des gaz.** 2 volumes grand in-8 (25 × 16), se vendant séparément.

I[re] PARTIE. *Généralités. Viscosité des Liquides.* Volume de VII-228 pages, avec 65 figures; 1907. 9 fr.

II[e] PARTIE. *Viscosité des gaz. Théories moléculaires.* (*Sous presse*).

BROCA (André), Professeur agrégé de Physique à la Faculté de Médecine. — **La télégraphie sans fil.** 2[e] édition entièrement refondue. In-18 jésus avec 52 figures; 1904. 4 fr.

CARTE de l'éclipse totale de Soleil des 29-30 août 1905. *Lieu des points d'où l'on peut en observer les phases.* Carte dressée sous la direction du Bureau des Longitudes, de format (110 × 103), pliée sous couverture (25 × 16); 1905. 2 fr. 50 c.

CATALOGUE INTERNATIONAL DE LA LITTÉRATURE SCIENTIFIQUE, publié par une COMMISSION internationale sous la direction de M. le D[r] **H. Foster Morley**. 1[re] année, 17 volumes. Prix des 17 volumes ensemble. 450 fr.

Chaque Volume se vend séparément.

	fr
A. Mathématiques.	18,75
B. Mécanique.	13,10
C. Physique.	45 »
D. Chimie.	48,75
E. Astronomie.	26,25
F. Météorologie.	18,75
G. Minéralogie.	18,75
H. Géologie.	18,75
J. Géographie.	18,75
K. Paléontologie.	13,10
L. Biologie générale.	13,10
M. Botanique.	48,75
N. Zoologie.	47 »
O. Anatomie humaine.	13,10
P. Anthropologie physique.	13,10
Q. Physiologie.	48,75
R. Bactériologie.	26,25

Deuxième année, formant 17 volumes. Prix des 17 volumes ensemble. 450 fr.

Chaque fascicule se vend séparément.

	fr
A. Mathématiques.	18,75
B. Mécanique.	13,10
C. Physique.	30 »
D. Chimie.	46,90
E. Astronomie.	26,25
F. Météorologie.	18,75
G. Minéralogie.	20,65
H. Géologie.	26,65
J. Géographie.	20,65
K. Paléontologie.	13,10
L. Biologie générale.	13,10
M. Botanique.	46,90
N. Zoologie.	48,75
O. Anatomie humaine.	18,75
P. Anthropologie physique.	18,75
Q. Physiologie.	48,75
R. Bactériologie.	26,25

La Troisième année forme 17 volumes qui sont du même prix que ceux de la Deuxième année.

La Quatrième est en cours de publication et les fascicules sont du même prix que ceux de la Deuxième et de la Troisième année.

CHANOZ (A.-M.), Docteur ès sciences physiques, Docteur en médecine. — **Recherches expérimentales sur les contacts liquides.** (*Annales de l'Université de Lyon*. Nouvelle série I, science, médecine, fascicule 18.) Grand in-8 (25 × 16) de 101 pages avec figures; 1906. 5 fr.

CONGRÈS INTERNATIONAL DE CHRONOMÉTRIE, Exposition universelle de 1900. — **Comptes rendus des Travaux, Procès-verbaux, Rapports et Mémoires** publiés sous les auspices du Bureau du Congrès, par L. FICHOT et P. DE VANSSAY, Secrétaires. In-4 avec fig.; 1902. 15 fr.

COMBEROUSSE (Charles de), Ingénieur, Professeur à l'École Centrale des Arts et Manufactures et au Conservatoire des Arts et Métiers, ancien Professeur de Mathématiques spéciales au collège Chaptal. — **Cours de Mathématiques** à l'usage des Candidats à l'École Polytechnique, à l'École Normale supérieure et à l'École centrale des Arts et Manufactures. 4 vol. in-8, avec fig.

Chaque Volume se vend séparément :

TOME I[er] : *Arithmétique* et *Algèbre élémentaire* (avec 38 figures). 4[e] édition; 1900. 10 fr.

On vend à part :

Arithmétique. 4 fr.
Algèbre élémentaire. 6 fr.

TOME II : *Géométrie élémentaire, plane et dans l'espace; Trigonométrie rectiligne et sphérique*, avec 543 fig. 13 fr.

On vend à part :

Géométrie élémentaire plane et dans l'espace, 4[e] édition 1904. 8 fr.
Trigonométrie rectiligne et sphérique, suivie de Tables des valeurs des lignes trigonométriques naturelles. 3[e] édition 1893. 5 fr.

TOME III : *Algèbre supérieure*. I[re] Partie : *Compléments d'Algèbre élémentaire* (*Déterminants, fractions continues*, etc.). — *Combinaisons*. — *Séries*. — *Etude des Fonctions*. — *Dérivées et Différentielles*. — *Premiers principes du Calcul intégral*. 3[e] édition (XXI-768 pages), avec 20 figures; 1904. 15 fr.

TOME IV : *Algèbre supérieure*. II[e] Partie : *Etude des imaginaires. Théorie générale des équations*. 2[e] édition (XXXIV-831 pages), avec 63 figures; 1890. 15 fr.

CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS (Exposition universelle de 1900). — **Rapports présentés au Congrès international des Mathématiciens**, réuni à Paris en 1900, rassemblés et publiés par E. DUPORCQ, Secrétaire général. Grand in-8; 1902. 16 fr.

CONGRÈS INTERNATIONAL DE PHYSIQUE, Exposition universelle de 1900. — **Travaux du Congrès international de Physique**, réuni à Paris en 1900, sous les auspices de la Société française de Physique, rassemblés et publiés par CH.-ED. GUILLAUME et L. POINCARÉ, Secrétaires généraux du Congrès. 4 volumes gr. in-8, avec fig.

TOMES I, II et III : *Rapports présentés au Congrès*; 1900. Les 3 volumes ensemble. 50 fr.

TOME IV : *Procès-verbaux. Annexes. Liste des Membres*; 1901. 6 fr.

On vend séparément :

Tome I : *Questions générales. Métrologie. Physique mécanique. Physique moléculaire*; 1900. 18 fr.

Tome II : *Optique. Électricité. Magnétisme*; 1900. 18 fr.

Tome III : *Électro-optique et Ionisation. Applications. Physique cosmique. Physique biologique*; 1900. 18 fr.

CONSTAN (P.), ancien Élève de l'École Navale, Ex-Enseigne de vaisseau, Professeur d'Hydrographie de la marine. — **Cours élémentaire d'Astronomie et de Navigation**, *à l'usage des Capitaines au long cours et des Élèves des Écoles d'Hydrographie.* 2 volumes grand in-8 (25 × 16) avec nombreuses figures se vendant séparément. (*Ouvrage en harmonie avec les derniers programmes des examens pour les brevets de Capitaine au long cours.*)

Tome I : *Astronomie*. Vol. de IV-215 p. avec 138 fig.; 1903. 7 fr. 50 c.

Tome II. *Navigation*. Vol. de IV-300 p. avec 159 fig. et 3 planches; 1904. 8 fr. 50 c.

CONSTAN (P.). — Tables graphiques d'azimut permettant de déterminer sans calculs et sans constructions : *le relèvement et la hauteur d'un astre quelconque; le nom d'un astre observé, l'instant du lever et du coucher vrai d'un astre et son relèvement; l'instant des circonstances favorables au calcul d'heure et la hauteur correspondante; le coefficient de Pagel; les éléments nécessaires pour naviguer par l'arc du grand cercle.* In-4 (28 × 22,5) de 41 pages; 1906. 3 fr.

CORNU (A.), Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes. — **Notices sur l'Électricité.** *Électricité statique et dynamique. Production et transport de l'énergie électrique*; avec une Préface de A. Potier, Membre de l'Institut. (Notices extraites de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes.*) In-16 (19 × 12), avec fig.; 1904. 5 fr.

COUTURAT (Louis). — L'Algèbre de la Logique (*Collection Scientia*). In-8 écu (20 × 13) de 100 p., cartonné; 1905. 2 fr.

CURIE (Mme S.). — Recherches sur les substances radioactives. 2e édition. Grand in-8 (25 × 16) de 105 pages, avec 14 figures; 1904. 5 fr.

DA CUNHA (A.), Ingénieur des Arts et Manufactures. — **L'année technique (1906)**. *Accidents du travail. Chauffage et distribution d'eau dans les maisons. Travaux publics et construction. Locomotion.* Avec Préface de Alfred Picard; Membre de l'Institut. Grand in-8 de XII-237 pages avec 134 figures; 1906. 3 fr. 50 c.
— Les années précédentes se vendent chacune 3 fr. 50 c.

DARBOUX (G.), Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences. — **Leçons sur la Théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal.** 4 vol. gr. in-8, av. fig., se vendant séparément.

Ire Partie : *Généralités. — Coordonnées curvilignes. — Surfaces minima*; 1887. 15 fr.

IIe Partie : *Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles. — Des lignes tracées sur les surfaces*; 1889. 15 fr.

IIIe Partie : *Lignes géodésiques et courbure géodésique. — Paramètres différentiels. — Déformation des surfaces*; 1894. 15 fr.

IVe et dernière Partie : *Déformation infiniment petite et représentation sphérique*; 1896. 15 fr.

DARBOUX (G.). — Étude sur le développement des méthodes géométriques. Lue le 24 septembre 1904, au Congrès des Sciences et des Arts, à Saint-Louis. Brochure in-8 (25 × 16) de 28 pages; 1905. 1 fr. 50 c.

DESLOY (Paul). Ingénieur agronome, Planteur à Madagascar. — **La culture pratique du cocotier sur la côte nord-ouest de Madagascar.** In-8 (23 × 14) de 40 pages; 1905. 1 fr. 50 c.

DOSTOR (G.), Docteur ès Sciences, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université catholique de Paris. — **Éléments de la théorie des déterminants**, avec application à l'Algèbre, la Trigonométrie et la Géométrie analytique dans le plan et dans l'espace. In-8 de XXXIII-351 pages. 2e édition (nouveau tirage); 1905. 8 fr.

DUCROT (André), Ancien Élève de l'École Polytechnique. — **Presses modernes typographiques.** In-4 (28 × 23) de 162 p., avec 141 fig.; 1904. 7 fr. 50 c.

DUHEM (Pierre), Correspondant de l'Institut de France, Professeur de Physique théorique à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — **Recherches sur l'Hydrodynamique.** Deux volumes in-4 se vendant séparément.

Ire Série : *Principes fondamentaux de l'hydrodynamique. Propagation des discontinuités, des ondes, des quasi-ondes*, avec 18 figures; 1903. 10 fr.

IIe Série : *Les conditions aux limites. Le théorème de Lagrange et la viscosité. Les coefficients de viscosité et la viscosité au voisinage de l'état critique*; avec figures; 1904. 7 fr. 50 c.

DUHEM (Pierre). — Recherches sur l'Élasticité. *De l'équilibre du mouvement des milieux vitreux. Les milieux vitreux peu déformés. La stabilité des milieux élastiques. Propriétés générales des ondes dans les milieux visqueux et non visqueux.* In-4 (28 × 23) de 218 pages; 1906. 12 fr.

ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, publiée sous les auspices des Académies des Sciences de Gottingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne. Édition française, publiée d'après l'édition allemande, sous la direction de Jules Molk, Professeur à l'Université de Nancy, avec le concours de nombreux savants et professeurs français.

L'édition française de l'*Encyclopédie* est publiée en 7 tomes formant chacun 3 ou 4 volumes de 200 à 300 pages grand in-8, qui paraissent en fascicules de 10 feuilles environ.

Le prix de chaque fascicule sera d'environ 5 fr.

TOME I : ALGÈBRE.

Volume I : **Arithmétique.**

Fascicule I : *Principes fondamentaux de l'Arithmétique*; exposé, d'après H. Schubert, par J. Tannery et J. Molk. — *Analyse combinatoire et théorie des déterminants*; exposé, d'après E. Netto, par H. Vogt. — *Nombres irrationnels et limites*; exposé, d'après A. Pringsheim, par J. Molk, 1904. 5 fr.

Volume III : **Théorie des Nombres.**

Fascicule I : *Propositions élémentaires de la théorie des nombres*; exposé, d'après P. Bachmann, par Ed. Maillet. — *Théorie arithmétique des formes*; exposé, d'après K. Th. Vahlen, par E. Cahen, 1906. 3 fr.

Volume IV : **Calcul des probabilités. Théorie des erreurs. Applications diverses.**

Fascicule I : *Calcul des probabilités*; exposé, d'après E. Czuber, par J. Le Roux. — *Calcul des différences et interpolation*; exposé, d'après D. Seliwanov et J. Bauschinger, par H. Andoyer, 1906. 5 fr.

(*Demander le prospectus spécial.*)

FASSBINDER (Ch.). Professeur du Cours préparatoire à l'École navale au Collège Stanislas. — **Théorie et pratique des approximations numériques.** In-8 (23 × 14) de VI-91 pages avec 4 figures; 1906. 3 fr.

FINK (E.). — Précis d'Analyse chimique. 2 Vol. In-16 (19 × 12).

Ire Partie : *Analyse qualitative*. 2e édition revue et corrigée. Vol. de VI-171 pages, avec 12 figures, cartonné à l'anglaise; 1906. 3 fr. 50 c.

IIe Partie : *Analyse quantitative.* (*Sous presse*).

FORCRAND (R. de), Correspondant de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences, Directeur de l'Institut de Chimie de l'Université de Montpellier. — **Cours de**

Chimie *à l'usage des étudiants du P. C. N.* Deux volumes in-8 (23 × 14) se vendant séparément.

Tome I : *Généralités. Chimie minérale.* Volume de vi-325 pages avec 16 figures; 1905. 5 fr.

Tome II : *Chimie organique. Chimie analytique.* Volume de iv-317 p. avec 3 fig.; 1905. 5 fr.

FRENET (F.), Professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Lyon. — **Recueil d'Exercices sur le Calcul infinitésimal.** Ouvrage destiné aux Candidats à l'École Polytechnique et à l'École Normale et à la licence. 6e édition, augmentée d'un *Appendice sur les résidus, les fonctions elliptiques, les équations aux dérivées partielles, les équations aux différentielles totales*, par H. Laurent, Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. In-8, avec figures; 1904. 8 fr.

FREYCINET (Ch. de). — **Sur les principes de la Mécanique rationnelle.** In-8; 1902. 4 fr.

FREYCINET (Ch. de). — **De l'expérience en Géométrie.** Volume in-8; 1903. 4 fr.

FRILLEY. — **Les procédés de commande à distance au moyen de l'Électricité.** Volume in-16 (19 × 12) de vi-190 pages avec 94 figures; 1906. 3 fr. 50 c.

GANDILLOT (Maurice). — **Essai sur la gamme.** In-8 colombier (31 × 22), de xvi-575 pages avec 453 figures; 1906. 32 fr.

GARÇON (Jules), Ingénieur Chimiste. — **Répertoire général ou Dictionnaire méthodique de Bibliographie des Industries tinctoriales et des Industries annexes,** *depuis les origines jusqu'à la fin de l'année* 1896. (*Technologie et Chimie.*) Ouvrage honoré du grand prix décennal Daniel Dollfus de la Société industrielle de Mulhouse. 2 volumes grand in-8, 1638 p., plus un volume de Tables. Prix de l'Ouvrage complet. 100 fr.

Tome I : *Introduction et Avertissement général. Notice sur les sources bibliographiques du Dictionnaire. Tables.*

Tome II : Dictionnaire : Depuis *Accidents de fabrication* jusqu'à *Kermès.*

Tome III : Dictionnaire : Depuis *Laboratoires* jusqu'à la fin.

GAUTIER (Henri), et **CHARPY (Georges)**, anciens Élèves de l'École Polytechnique, Docteurs ès Sciences. — **Leçons de Chimie,** *à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales.* 4e édition, entièrement refondue, conforme au programme du 27 juillet 1904. Gr. in-8, avec 96 fig.; 1905.

Broché........... 10 fr. | Relié (cuir souple). 13 fr.

GERARD (Eric), Directeur de l'Institut électrotechnique Montefiore. — **Leçons sur l'Electricité,** professées à l'Institut électrotechnique Montefiore, annexé à l'Université de Liége. 7e édition refondue et complétée. 2 vol. grand in-8, se vendant séparément :

Tome I : *Théorie de l'électricité et du magnétisme. Électrométrie. Théorie et construction des générateurs et des transformateurs électriques,* avec 400 figures; 1904. 12 fr.

Tome II : *Canalisation et distribution de l'énergie électrique. Applications de l'électricité à la Télégraphie, à la Téléphonie, à la production et à la transmission de la puissance motrice, à la Traction, à l'Éclairage, à la Métallurgie et à la Chimie industrielle,* avec 432 figures; 1905. 12 fr.

GIBBS (J.-W.), Professeur au Collège Yale, à Newhaven. — **Diagrammes et surfaces thermodynamiques.** Traduction de G. Roy, Chef de travaux de Physique à l'Université de Dijon, avec une Introduction de B. Brunhes, Professeur à l'Université de Clermont. In-8 écu de 86 p. avec fig., cartonné (*C. S.*); 1903. 2 fr.

GIRARD (Aimé). — **Recherches sur la culture de la pomme de terre industrielle.** 2e édition. Nouveau tirage contenant les derniers résultats obtenus. Un volume grand in-8, avec figures et un atlas cartonné de 6 belles planches en héliogravure; 1900. 10 fr.

On vend séparément :

Texte......... 5 fr. | Atlas....... 5 fr.

GODEFROY (M.), Bibliothécaire de la Faculté des Sciences de Marseille. — **Théorie élémentaire des séries.** Avec une Préface de L. Sauvage, Professeur à la Faculté des Sciences de Marseille. Grand in-8 avec fig.; 1903. 8 fr.

GOURSAT (E.), Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours d'Analyse** *de la Faculté des Sciences de Paris.* 2 volumes grand in-8.

Tome I : *Dérivées et différentielles. Intégrales définies. Développements en série. Applications géométriques.* Volume de vi-620 p., avec 52 figures; 1902. 20 fr.

Tome II : *Théorie des fonctions analytiques. Équations différentielles. Équations aux dérivées partielles. Éléments de calcul des variations.* Volume de vi-640 p., avec 95 figures; 1905. 20 fr.

GRANGER (Albert), Professeur de Chimie et de Technologie céramique à l'École d'Application de la Manufacture nationale de Sèvres. — **La Céramique industrielle.** *Chimie. Technologie* (Bibliothèque technologique). In-8 (23 × 14) de x-644 pages avec 179 figures; 1905. Cartonné. 17 fr.

GRIMSHAW (Robert), M. E. — **L'atelier moderne de constructions mécaniques. Procédés mécaniques spéciaux et tours de main.** Traduit de l'anglais par A. Lattuga.

Ire Série : Volume de 394 pages avec 222 figures; 1903. 10 fr.

IIe Série. Volume de 377 pages avec 593 figures; 1906. 10 fr.

GUICHARD (C.), Correspondant de l'Institut, Professeur à l'Université de Clermont-Ferrand. — **Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmes triple-orthogonaux** (*Collection Scientia*). In-8 écu (20 × 13) de 95 pages, avec 4 figures, cartonné. 2 fr.

GUILLAUME (Ch.-Ed.). — **Les applications des aciers au nickel,** avec un Appendice sur la *Théorie des aciers au nickel.* In-8, avec 25 figures; 1904. 3 fr. 50 c.

— **Recherches sur le nickel et ses alliages.** In-8 1898. 1 fr. 75 c.

Les deux volumes se vendent ensemble 5 fr.

GUILLAUME (Jacques), Ingénieur des Arts et Manufactures. — **Notions d'électricité.** *Son utilisation dans l'industrie.* In-8 (23 × 14) de ix-351 pages, avec 154 fig.; 1905. 7 fr. 50 c.

HALLER (Albin), Membre de l'Institut. — **Les industries chimiques et pharmaceutiques.** 2 volumes gr. in-8, avec 108 fig.; 1903, se vendant ensemble. 20 fr.

HALLER (A.). Les récents progrès de la Chimie. Conférences faites au Laboratoire de Chimie organique de la Sorbonne, sous la direction de A. Haller.

Ire Série. In-8 de 321 pages; 1904. 5 fr.

IIe Série. In-8 de 313 pages; 1906. 5 fr.

HART (G.). — **Les turbines à vapeur.** Grand in-8 (25 × 16) avec 53 fig. et 1 pl.; 1904. 4 fr.

HERMITE. — **Correspondance d'Hermite et Stieltjes,** publiée par les soins de B. Baillaud, Directeur de l'Observatoire de Toulouse, et H. Bourget, Maître de Conférences à l'Université, avec une *Préface* de E. Picard, Membre de l'Institut. 2 vol. gr. in-8 (25 × 16) se vendant séparément.

Tome I (8 novembre 1882-22 juillet 1889). Volume de xx-477 pages avec 2 portraits; 1904. 16 fr.

Tome II (18 octobre 1889-15 décembre 1894). Volume de vi-457 pages avec 1 portrait et un fac-simile; 1905. 16 fr.

HERMITE. — **Œuvres de Charles Hermite**, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par Emile Picard, Membre de l'Institut. Volumes gr. in-8 (25 × 16) se vendant séparément.

Tome I. Volume de XL-500 pages avec un portrait d'Hermite; 1905. 18 fr.
Tomes II et III. (*En préparation.*)

HOÜEL (J.). — **Tables de Logarithmes à cinq décimales pour les nombres et les lignes trigonométriques, suivies des Logarithmes d'addition et de soustraction ou Logarithmes de Gauss et de diverses Tables usuelles.** Nouvelle éd., revue et augm. Grand in-8; 1905. (*Autorisé par décision ministérielle.*)

Broché. 2 fr. | Cartonné. 2 fr. 75 c.

HUMBERT (G.), Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. — **Cours d'analyse** *professé à l'École Polytechnique;* 2 volumes grand in-8.

Tome I : *Calcul différentiel. Principes du calcul intégral. Applications géométriques;* avec 111 figures, 1902. 16 fr.

Tome II : *Complément de la théorie des intégrales définies. Fonctions eulériennes. Fonctions d'une variable imaginaire. Fonctions elliptiques et applications d'équations différentielles;* avec 91 figures. 1904. 16 fr.

INSTITUT DE FRANCE. — *Voir* au *Catalogue général :* **Mémoires de l'Académie des Sciences. — Tables générales des Travaux contenus dans les Mémoires de l'Académie des Sciences. — Recueil de Mémoires, Rapports et Documents relatifs à l'observation du passage de Vénus sur le Soleil, en 1874. — Mémoires relatifs à la nouvelle maladie de la vigne. — Mission du Cap Horn.**

INSTRUCTION SUR LES PARATONNERRES, adoptée par l'Académie des Sciences; Nouvelle édition complétée. In-16 (19×12), avec 58 figures et 1 pl.; 1904. 3 fr.

JACQUIN (Charles), ancien Élève de l'École de Physique et de Chimie de Paris. — **Les alternateurs à collecteurs monophasés et polyphasés et les dynamos à courant continu à deux paires de balais.** In-8 (23 × 14) de XII-140 pages, avec 40 fig.; 1904. 3 fr. 50 c.

JAMES (E.), Professeur de théorie aux Écoles d'Horlogerie et de Mécanique de Genève. — **Théorie et pratique de l'Horlogerie** à l'usage des horlogers et des Écoles d'horlogerie. In-16 (19 × 12) de VI-228 pages, avec 126 figures; 1906. 5 fr.

JAMIN (J.), Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, Professeur de Physique à l'École Polytechnique, et **BOUTY (E.)**, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Cours de Physique de l'École Polytechnique.** 4ᵉ édition, augmentée et entièrement refondue par E. Bouty. 4 forts vol. in-8 de plus de 4000 pages, avec 1587 figures et 14 planches sur acier, dont 2 en couleur; 1885-1891. 72 fr.

Prix des 3 Suppléments : 1896, 1899, 1906. 15 fr.

(Demander le prospectus détaillé et la Table générale des matières.)

JANET (Paul), Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, Directeur de l'École supérieure d'Électricité. — **Leçons d'Électrotechnique générale** professées à l'École supérieure d'Électricité. 2ᵉ édition, revue et augmentée. Trois volumes grand in-8 (25 × 16), avec nombreuses figures.

Tome I : *Généralités. Courants continus.* Volume de XII-369 pages, avec 166 figures; 1904. 11 fr.

Tome II : *Courants alternatifs sinusoïdaux et non sinusoïdaux. Alternateurs. Transformateurs.* Volume de 309 pages, avec 156 figures; 1905. 11 fr.

Tome III : *Moteurs à courants alternatifs. Couplage des alternateurs. Transmission par courants alternatifs. Compoundage des alternateurs. Transformateurs polymorphiques.* (*En préparation.*)

JANET (Paul). — **Premiers principes d'Électricité industrielle.** *Piles. Accumulateurs. Dynamos. Transformateurs.* 5ᵉ édition revue et corrigée. In-8, avec 169 fig.; 1903. 6 fr.

JOUFFRET (G.), ancien Élève de l'École Polytechnique, Membre de la Société mathématique de France. — **Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions.** *Introduction à la géométrie à n dimensions.* Gr. in-8, de XXXIX-213 p. avec 65 fig.; 1903. 7 fr. 50 c.

— **Mélanges de Géométrie à quatre dimensions.** Grand in-8 (25×16) de X-227 p. avec 49 fig.; 1906. 7 fr. 50 c.

LALANDE. — **Tables de Logarithmes pour les Nombres et les Sinus à CINQ DÉCIMALES;** revues par le baron *Reynaud.* Nouvelle édition, augmentée de *Formules pour la Résolution des Triangles*, par *Bailleul*, typographe. In-18; 1903. (*Autorisé par décision du Ministre de l'Instruction publique.*)

Broché. 2 fr. | Cartonné. 2 fr. 40 c.

LALANDE. — **Tables de Logarithmes, étendues à SEPT DÉCIMALES**, par *Marie*, précédées d'une Instruction par le baron *Reynaud.* Nouvelle édition, augmentée de *Formules pour la Résolution des Triangles*, par *Bailleul*, typographe. In-12; 1903.

Broché. 3 fr. 50 c. | Cartonné. 3 fr. 90 c.

LEBESGUE (Henri), Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Rennes. — **Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives** professées au Collège de France. Grand in-8 avec figures; 1904. 3 fr. 50 c.

LE BLANC (Max), Directeur de l'Institut électrochimique de l'École supérieure technique de Carlsruhe. — **Traité d'Électrochimie**, traduit avec l'autorisation de l'auteur, sur la 3ᵉ édition allemande, par C. Marie, Préparateur d'Électrochimie à la Faculté des Sciences (Institut de Chimie appliquée). In-8 (23 × 14) de IV-332 pages avec figures (*B. T.*); 1904. 7 fr.

LECHALAS (Georges), Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. — **Introduction à la Géométrie générale.** In-16 (19 × 12) de IX-58 p. avec 5 fig.; 1905. 1 fr. 75 c.

LEDEBUR (A.), Professeur à l'Académie des Mines de Freiberg (Saxe). — **Traité de Technologie mécanique métallurgique.** Traduit sur la 2ᵉ édition allemande par G. Humbert, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. Avec un Appendice *Sur la sécurité des ouvriers dans le travail*, par M. Joly. Grand in-8 de IV-740 pages, avec 729 fig.; 1903. 25 fr.

LÉVY (Maurice), Membre de l'Institut, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur au Collège de France et à l'École Centrale des Arts et Manufactures. — **La Statique graphique et ses applications aux constructions.** 4 vol. grand in-8, avec 4 Atlas de même format. (*Ouvrage honoré d'une souscription du Ministère des Travaux publics.*)

Iʳᵉ Partie. — *Principes et applications de Statique graphique pure.* 3ᵉ édition. Volume de XXX-598 p., avec figures et un Atlas de 25 planches; 1907. 22 fr.

IIᵉ Partie. — *Flexion plane. Lignes d'influence. Poutres droites.* 2ᵉ édition. Volume de XIV-345 pages, avec figures et un Atlas de 6 pl.; 1886. 15 fr.

IIIᵉ Partie. — *Arcs métalliques. Ponts suspendus rigides. Coupoles et corps de révolution.* 2ᵉ édition. Volume de IX-418 p., avec fig. et un Atlas de 8 pl.; 1887. 17 fr.

IVᵉ Partie. — *Ouvrages en maçonnerie. Systèmes réticulaires à lignes surabondantes. Index alphabétique des quatre Parties.* 2ᵉ édition. Volume de IX-350 p. avec fig. et un Atlas de 4 pl; 1888. 15 fr.

LINDET (L.), Docteur ès Sciences, Professeur à l'Institut national agronomique. — **Le Froment et sa mouture**

Aimé Girard, Membre de l'Institut. Grand in-8, avec 85 figures; 1903. 12 fr.

LOISEL (Julien). — Guide de l'amateur météorologiste. In-8 (23 × 14) de 92 pages, avec 14 figures et 2 planches; 1906. 2 fr. 75 c.

LOPPÉ (F.), Ingénieur des Arts et Manufactures. — **Essais industriels des machines électriques et des groupes électrogènes** (*Conférences de l'École supérieure d'Électricité*). Grand in-8° avec 129 figures; 1904. 8 fr.

LOPPÉ (F.). — Traité élémentaire des enroulements des dynamos à courant continu. In-16 (19 × 12) avec figures et 12 planches; 1904. 2 fr. 75 c.

LORENZ (Richard), Professeur à l'École Polytechnique fédérale de Zurich, Directeur des laboratoires d'Électrochimie et de Chimie physique. — **Traité pratique d'Électrochimie**, refondu, d'après l'édition allemande, **Traité de meunerie**, d'après un manuscrit inachevé de par Georges Hostelet. In-8 (23 × 14) de VI-320 pages, avec 77 figures; 1905. 9 fr.

LUCAS DE PESLOUAN. — N.-H. Abel, Sa Vie et son Œuvre. In-8 colombier (23 × 15) de XIII-169 pages, avec un portrait; 1906. Cartonné. 5 fr.

MAILLET (Edmond), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique. — **Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions.** Grand in-8 (25 × 16) de V-275 pages; 1906. 12 fr.

MANNHEIM (le Colonel A.), Professeur à l'École Polytechnique. — **Principes et Développements de la Géométrie cinématique**, *Ouvrage contenant de nombreuses applications à la Théorie des surfaces.* In-4, avec 186 figures; 1894. 25 fr.

MANSION (Paul), Professeur à l'Université de Gand. — **Calcul des Probabilités.** *Sa portée objective et ses principes.* Gr. in-8 (25 × 16) de IV-120 p.; 1905. 3 fr.

MARCHIS (L.), Professeur adjoint de Physique à la Faculté des Sciences de Bordeaux. — **Leçons sur les moteurs à gaz et à pétrole**, faites à la Faculté des Sciences de Bordeaux. In-18 jésus de L-175 pages, avec 19 fig.; 1901. 2 fr. 75 c.

MARCHIS (L.). — Thermodynamique. 2 volumes grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément.

Tome I : *Notions fondamentales.* Volume de IV-176 p. avec 15 figures; 1904. 5 fr.

Tome II : *Introduction à l'étude des machines thermiques.* Volume de III-135 pages avec 20 figures; 1905. 5 fr.

MASCART (E.), Membre de l'Institut, Professeur au Collège de France, Directeur du Bureau Central météorologique. — **Traité d'Optique.** 3 volumes grand in-8 avec Atlas, se vendant séparément.

Tome I : *Systèmes optiques. Interférences. Vibrations. Diffraction. Polarisation. Double réfraction.* Avec 199 figures et 2 pl.; 1889. 20 fr.

Tome II et Atlas : *Propriétés des cristaux. Polarisation rotatoire. Réflexion vitrée. Réflexion métallique. Réflexion cristalline. Polarisation chromatique.* Avec 113 fig. et Atlas contenant 2 planches sur cuivre dont une en couleur (Propriétés des cristaux. Coloration des cristaux par les interférences); 1891. 25 fr.

Tome III : *Polarisation par diffraction. Propagation de la lumière. Photométrie. Réfractions astronomiques.* Avec 83 figures; 1893. 20 fr.

MASCART (Jean), Astronome adjoint à l'Observatoire de Paris. — **La découverte de l'anneau de Saturne par Huygens**, avec la reproduction des anciens dessins (27 figures). Grand in-8 (25 × 16) de 58 pages; 1907. 2 fr.

MATHIAS (E.), Professeur de Physique à la Faculté des Sciences de Toulouse. — **Le point critique des corps purs.** In-8 de VIII-255 p., avec 44 fig.; 1904. 7 fr.

MARX (A.), Inspecteur général des Ponts et Chaussées en retraite. — **L'Ether principe universel des forces.** Mémoires résumés par C. Benoît, Licencié ès Sciences, ancien Élève de l'École Polytechnique. Grand in-8 (25 × 14) de 217 pages, avec figures; 1905. 6 fr. 50 c.

MAXWELL (James Clerk), Professeur de Physique expérimentale à l'Université de Cambridge. — **Traité de l'Électricité et du Magnétisme.** Traduit de l'anglais sur la 2e édition, par Seligmann-Lui, Ingénieur des Télégraphes, avec *Notes et Éclaircissements* par Cornu, Membre de l'Institut, et Potier, Professeur à l'École Polytechnique, et suivi d'un *Appendice sur la théorie des Quaternions*, par E. Sarrau, Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique. Deux forts volumes grand in-8, avec 122 figures et 20 planches; 1885-1889. 30 fr.
Chaque volume............... 15 fr.

MÉRAY, Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon. — **Leçons nouvelles d'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques.** 4 volumes grand in-8.

Ire Partie : *Principes généraux*; 1894. 13 fr.

IIe Partie : *Étude monographique des principales fonctions d'une seule variable*; 1895. 14 fr.

IIIe Partie : *Questions analytiques classiques*; 1897. 6 fr.

IVe Partie : *Applications géométriques classiques*; 1898. 7 fr.

METZ (G. de). — La double réfraction accidentelle dans les liquides. In-8 écu (20 × 13) de 100 pages, avec 31 figures; 1906. Cartonné. 2 fr.

MILLER (W.-V.) et KILIANI (H.). — Traité de Chimie analytique, revue par H. Kiliani, Professeur à l'Université de Fribourg in B. 1re édition française, traduite avec autorisation de l'Auteur, sur la 5e édition allemande; par H. Defoin et E. von Winiwarter, Docteur ès Sciences, assistant à l'Université de Liége. In-8 (22 × 14) de XIV-661 pages, avec 96 figures et un Tableau d'Analyse spectrale; 1906, cartonné. 15 fr.

MOREL (Marie-Auguste), Ingénieur, ancien Élève de l'École des Ponts et Chaussées, Directeur des usines à ciment de Lumbres. — **L'acétylène. Théorie et applications.** Grand in-8 avec 7 figures; 1903. 5 fr.

MOUREU (Ch.), Professeur agrégé à l'École supérieure de Pharmacie de l'Université de Paris. — **Notions fondamentales de Chimie organique.** 2e édition revue et augmentée. In-8 (23 × 14) de VI-320 pages; 1906.

Broché....... 7 fr. 50 c. | Cartonné toile. 8 fr. 50 c.

NIEWENGLOWSKI (B.), Inspecteur de l'Académie de Paris, Docteur ès Sciences, et **GÉRARD (L.)**, Professeur au lycée Ampère, Docteur ès Sciences. — **Cours de Géométrie élémentaire** à l'usage du Premier Cycle B, du Second cycle C et D et des Mathématiques A et B.

I. *Géométrie plane.* In-8 (23 × 14) de XX-251 pages, avec 226 fig., cartonné à l'anglaise; 1903. 3 fr. 50 c.
Broché 2 fr. 50 c.

II. *Géométrie dans l'espace.* In-8 (23 × 14) de 263 pages, avec 208 figures, cartonné à l'anglaise; 1903. 3 fr. 50 c.
Broché 2 fr. 50 c.

Cours de Géométrie élémentaire à l'usage du Premier Cycle A et du Second cycle A et B.

I. *Géométrie plane.* In-8 (23 × 14) de XVI-163 pages, avec 182 figures, cartonné à l'anglaise; 1903. 3 fr.
Broché 2 fr.

II. *Géométrie dans l'espace.* In-8 (23 × 14) de 121 pages, avec 96 figures, cartonné à l'anglaise; 1903. 3 fr.
Broché 2 fr.

OCAGNE (Maurice d'), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique. — **Traité de Nomographie.** *Théorie des abaques. Applications pratiques.* Grand in-8, avec 177 figures et 1 planche; 1899.
Broché......... 14 fr. | Relié (cuir souple). 17 fr.

OCAGNE (Maurice d'). — **Leçons sur la Topométrie et la cubature des Terrasses** comprenant des notions sommaires de Nomographie professées à l'École des Ponts et Chaussées. Grand in-8 (25 × 16) de VIII-225 pages, avec 145 figures; 1904. 7 fr. 50 c.

OCAGNE (Maurice d'). — **Le Calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques.** *Histoire et description sommaire des instruments et machines à calculer, tables, abaques et nomogrammes.* 2e édition entièrement refondue et considérablement augmentée. In-8 (23 × 14) de VIII-228 p. avec 70 fig., cartonné; 1905. 5 fr.

OSTWALD (Dr W.). — **Éléments de Chimie inorganique,** traduits de l'allemand par L. Lazard. 2 volumes grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément.
Ire Partie : *Métalloïdes.* Volume de IX-542 pages, avec 106 figures; 1904. 15 fr.
IIe Partie : *Métaux.* Volume de 450 pages avec 17 figures; 1905. 15 fr.

PELLAT (H.), Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris. — **Cours d'Électricité.** (Cours de la Faculté des Sciences.) 3 volumes grand in-8 se vendant séparément.
Tome I : *Électrostatique. Lois d'Ohm. Thermo-électricité.* Volume de VI-329 pages avec 145 figures: 1901. 10 fr.
Tome II : *Électrodynamique. Magnétisme. Induction. Mesures électro-magnétiques.* Volume de IV-554 pages avec 221 figures; 1903. 18 fr.
Tome III : *Électrolyse. Électrocapillarité, etc.* (*En préparation.*)

PERRIN (Jean), Chargé du Cours de Chimie physique à la Faculté des Sciences de Paris. — **Traité de Chimie physique. Les Principes.** Grand in-8 avec 38 figures; 1903.
Broché.... 10 fr. | Relié cuir souple. 13 fr.

PETIT (P.), Professeur à l'Université de Nancy, Directeur de l'École de Brasserie. — **Brasserie et Malterie.** Grand in-8, avec 89 figures; 1904. Cartonné. 12 fr.

PETIT BOIS (G.), Ingénieur civil des Mines. — **Tables d'intégrales indéfinies.** In-4 (30 × 23) de XII-154 pages; 1906. 10 fr.

PETROVITCH (M.), Professeur à l'Université de Belgrade. — **La Mécanique des phénomènes fondée sur les analogies.** In-8 écu (20 × 13) de 96 pages, avec 114 figures; 1906. 2 fr.

PICARD (Émile), Membre de l'Institut, Profr à la Fté des Sciences. — **Traité d'Analyse** (Cours de la Faculté des Sciences.) 4 vol. grand in-8, se vendant séparément :
Tome I : *Intégrales simples et multiples. — L'équation de Laplace et ses applications. — Développements en séries. — Applications géométriques du Calcul infinitésimal.* 2e édition, avec 25 figures; 1901. 16 fr.
Tome II : *Fonctions harmoniques et fonctions analytiques. — Introduction à la théorie des équations différentielles. Intégrales abéliennes et surfaces de Riemann;* avec figures; 2e édition, revue et augmentée, avec 58 fig., 1905. 18 fr.
Tome III : *Des singularités des intégrales des équations différentielles. Étude du cas où la variable reste réelle et des courbes définies par des équations différentielles. Équations linéaires; analogies entre les équations algébriques et les équations linéaires;* avec 24 figures; 1896. 18 fr.
Tome IV : *Équations aux dérivées partielles.* (*En prép.*)

PICARD (Émile), Membre de l'Institut. — **Sur le développement de l'Analyse et ses rapports avec diverses sciences.** Conférences faites en Amérique en 1899 et 1904. In-8 (23 × 14) de VI-168 p.; 1905. 3 fr. 50

PICARD (E.), Membre de l'Institut, Professeur à l'Université de Paris, et **SIMART**, Capitaine de frégate, Répétiteur à l'École Polytechnique. — **Théorie des Fonctions algébriques de deux variables indépendantes.** 2 volumes grand in-8 se vendant séparement.
Tome I : Volume de VI-256 p., avec fig.; 1897. 9 fr.
Tome II : Volume de VI-528 pages, avec figures. 1906. 18 fr.

PIONCHON (J.), Professeur à la Faculté des Sciences. Directeur de l'Institut électrotechnique de l'Université de Grenoble. — **Notions fondamentales sur l'évaluation numérique des grandeurs géométriques,** Grand in-8 de 128 pages, avec 54 fig.; 1903. 3 fr. 50 c.

PIONCHON (J.). — **Principes et formules de Trigonométrie rectiligne et sphérique** avec un appendice sur les **Maxima et Minima des figures géométriques.** Grand in-8 (25 × 16) de 146 pages et 63 figures; 1906. 5 fr.

POINCARÉ (H.), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.** 3 vol. grand in-8, se vendant séparément.
Tome I : *Solutions périodiques. — Non-existence des intégrales uniformes. — Solutions asymptotiques.* Avec figures; 1892. 12 fr.
Tome II : *Méthodes de MM. Newcomb, Gyldén, Lindstedt et Bohlin;* 1894. 14 fr.
Tome III et dernier : *Invariants intégraux. — Solutions périodiques du deuxième genre. — Solutions doublement asymptotiques;* 1899. 13 fr.

POINCARÉ (H.), Membre de l'Institut. — **Leçons de Mécanique céleste.** 2 volumes grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément.
Tome I : *Théorie générale des perturbations planétaires.* Volume de VI-367 p. avec 3 fig.; 1905. 12 fr.
Tome II. — 1re partie) : *Développement de la fonction perturbatrice.* Volume de IV-167 p.; 1907. 6 fr.
— (2e partie) : *Théorie des petites planètes. Théorie de la Lune.* (*En préparation.*)

— **La Théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes. La Télégraphie sans fil.** 2e édition. In-8 écu (20 × 13) de 80 pages, avec 5 figures, cartonné (*C. S.*); 1903. 2 fr.

RÉPERTOIRE BIBLIOGRAPHIQUE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, publié par la *Commission permanente du Répertoire.* Paraît successivement par séries de 100 fiches format in-32 ($14^{cm} \times 9^{cm}$), renfermées dans un étui en papier fort. Prix de chaque série. 2 fr.
Les seize premières séries (fiches 1 à 1600, 1894-1906) sont mises en vente.

REY-PAILHADE (J.-A. de), Ingénieur civil des Mines, et **JOUFFRAY (A.-Ch.)**, Astronome. — **Éphémérides décimales pour le méridien de Paris à l'usage des Astronomes et des Navigateurs pour 1905,** avec une Préface de M. E. Goedseels. Un volume grand in-8 (28 × 19) de XX-95 pages; 1904. 6 fr. 50 c.

REZELMAN (J.). — **Alternateurs mono- et polyphasés.** *Étude de leur fonctionnement.* Brochure in-4 (28 × 23) de 35 pages avec 50 figures; 1905. 2 fr.

RIOLLOT (J.), Ingénieur civil des Mines. — **Les Carrés magiques.** *Contribution à leur étude.* Grand in-8 (25 × 16) de IV-119 pages, avec 311 figures; 1907. 5 fr.

ROCQUES (X.), Expert-chimiste, ancien Chimiste principal au Laboratoire municipal de Paris. — **Les industries de la Conservation des aliments.** In-8 (23 × 14) de XI-506 p. avec 124 figures; 1906. Cartonné. 15 fr.

RODET (J.), Ingr des Arts et Manufactures. — **Distribution de l'énergie par courants polyphasés.** 2e édit. entièrement refondue. In-8, avec 273 fig.; 1903. 15 fr.

RODET (J.). — **Résistance, inductance et capacité.** In-8 (23 × 14) de x-257 p., avec 76 fig.; 1905. 7 fr.

ROUCHÉ (Eugène), et COMBEROUSSE (Charles de). — **Traité de Géométrie,** 7e éd., revue et augmentée par E. Rouché. Fort in-8 de LX-1212 p., avec 703 fig. et 1175 questions proposées et problèmes; 1900. 17 fr.

Prix de chaque Partie :

Ire Partie. — *Géométrie plane*............ 7 fr. 50 c.
IIe Partie. — *Géométrie de l'espace ; Courbes et Surfaces usuelles.* 9 fr. 50 c.

ROUCHÉ (Eugène) et COMBEROUSSE (Charles de). — **Éléments de Géométrie,** 7e édit. conforme au programme du 31 mai 1902, revue et complétée par Eugène Rouché, Membre de l'Institut, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers. In-8 de XL-651 p. avec 485 figures et 543 questions proposées et exercices; 1904. 6 fr.

SALMON (G.), Professeur au Collège de la Trinité, à Dublin. — **Traité de Géométrie analytique à deux dimensions (Sections coniques).** Traduit de l'anglais par *H. Resal* et *Vaucheret.* 3e édition française (conforme à la deuxième) publiée d'après la 6e édition anglaise, par *Vaucheret*, ancien Élève de l'École Polytechnique, Lieutenant-Colonel d'Artillerie, Professeur à l'École supérieure de Guerre. In-8, avec 124 figures; 1897. 12 fr.

SALMON (G.). — **Traité de Géométrie analytique (Courbes planes),** destiné à faire suite au *Traité des Sections coniques.* Traduit de l'anglais, sur la 3e édition, par *O. Chemin*, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École nationale des P. et Ch., et augmenté d'une *Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes*, par *G. Halphen.* Nouveau tirage. In-8, avec figures; 1903. 12 fr.

SCHRÖN (L.). — **Tables de Logarithmes à sept décimales** pour les nombres depuis **1** jusqu'à **108 000,** et pour les fonctions trigonométriques de 10 en 10 secondes; et **Table d'Interpolation pour le calcul des parties proportionnelles;** précédées d'une **Introduction** par *J. Hoüel.* Grand in-8 jésus. Paris; 1903.
Broché......... 10 fr. | Cartonné... 11 fr. 75.

On vend séparement :

	Broché.	Cartonné
Tables de Logarithmes.........	8 fr.	9 fr. 75 c.
Table d'interpolation...........	2	3 25

SÉGUIER (A. de), Docteur ès sciences mathématiques. — **Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits.** Grand in-8 (25 × 16) de II-176 pages; 1904. 5 fr.

SERRET (J.-A.). — **Traité de Trigonométrie.** 8e édition, revue et augmentée. In-8, avec figures; 1900. (*Autorisé par décision ministérielle.*) 4 fr.

SERRET (J.-A.). — **Cours de Calcul différentiel et intégral.** 5e édit. augmentée d'une *Note sur les fonctions elliptiques*; par Ch. Hermite. 2 forts vol. in-8, avec figures; 1900. 25 fr.

SERVICE GÉOGRAPHIQUE DE L'ARMÉE. — **Nouvelles Tables de logarithmes à cinq décimales** *pour les lignes trigonométriques dans les deux systèmes de la division centésimale et de la division sexagésimale du quadrant et pour les nombres de 1 à 12 000.* (Édition spéciale a l'usage des Candidats aux Écoles Polytechnique et de Saint-Cyr.) Grand in-8 cartonné. 3 fr.

SMITH (Edgar-F.), Professeur de Chimie à l'Université de Pennsylvanie. — **Analyse électrochimique.** Traduction publiée avec l'autorisation de l'auteur par Joseph Rosset, Ingénieur civil des Mines. In-18 jésus de XVI-203 pages, avec 27 figures; 1900. 3 fr.

SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE PHYSIQUE. — **État actuel des Industries électriques.** Conférences faites sous les auspices de la Société française de Physique et de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale. Grand in-8 (25 × 16) de 347 pages, avec 78 figures; 1906. 5 fr.

In-4 : *R.*

SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE PHYSIQUE. — **Collection de Mémoires relatifs à la Physique.** Deuxième Série. Voir *Abraham et Langevin*, page 1.

SOREL (E.). — **La grande industrie chimique minérale.**

I. — *Soufre, Azote, Phosphates, Alun.* In-8 (23 × 14) de 809 pages avec 113 figures, cartonné à l'anglaise (*B. T.*); 1902. 15 fr.

II. — *Potasse, Soude, Chlore.* In-8 (23 × 14) de 679 pages avec 137 figures, cartonné à l'anglaise (*B. T.*); 1904. 15 fr.

SOUCHON (Abel). — **La construction des cadrans solaires.** *Ses principes, sa pratique*, précédée d'une *Histoire de la Gnomonique.* In-16 (19 × 12) de 5? pages avec figures et 2 planches; 1905. 2 fr. 75 c.

SPÉE (le chanoine Eug.), Docteur en Sciences, Astronome à l'Observatoire royal de Belgique. — **Région b-f du spectre solaire.** Un volume de texte in-4, avec atlas in-folio de 17 planches (32 × 50); 1897. 40 fr.

STIELTJES. — **Correspondance d'Hermite et de Stieltjes** (voir *Hermite*, p. 19).

STOFFAES (l'abbé), Professeur adjoint à la Faculté catholique des Sciences de Lille, Directeur de l'Institut catholique d'Arts et Métiers de Lille. — **Cours de Mathématiques supérieures** *à l'usage des candidats de la licence ès sciences physiques.* 2e édition. In-8 (23 × 14) avec figures; 1903. 10 fr.

STURM, Membre de l'Institut. — **Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,** revu et corrigé par *Prouhet*, Répétiteur à l'École Polytechnique, et augmenté de la **Théorie élémentaire des Fonctions elliptiques,** par *H. Laurent.* 12e édition, mise au courant des nouveaux programmes de la Licence, par *A. de Saint-Germain*, Professeur à la Fac. des Sc. de Caen. 2 vol. in-8, avec fig.; 1901.
Broché..... 15 fr. | Cartonné. 16 fr. 50 c.

STURM, Membre de l'Institut. — **Cours de Mécanique à l'École Polytechnique,** publié, d'après le vœu de l'auteur, par *E. Prouhet.* 5e édition, revue et annotée par *A. de Saint-Germain*, Professeur à la Faculté des Sciences de Caen. (Nouveau tirage.) 2 vol. in-8 (23 × 14), avec 189 figures; 1905. 14 fr.

TABLES DE MORTALITÉ (1900) des Rentiers et Assurés en cas de vie établies par le Comité des trois Compagnies. (*Comité des Compagnies d'assurances à primes fixes sur la vie :* Assurances générales, Union, Nationale.) Grand in-8 (28 × 19) de XXX-364 pages avec 8 graphiques en couleurs; 1902. 30 fr.

TANNERY (Jules), Sous-Directeur des Études scientifiques à l'École Normale supérieure, et **MOLK (Jules),** Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. — **Éléments de la théorie des Fonctions elliptiques.** 4 volumes grand in-8 se vendant séparément. (Ouvrage complet.)

Tome I. — *Introduction. — Calcul différentiel* (Ire Partie); 1893. 7 fr. 50 c.
Tome II. — *Calcul différentiel* (IIe Partie); 1896. 9 fr.
Tome III. — *Calcul intégral* (Ire Partie); 1898. 8 fr. 50 c.
Tome IV. — *Calcul intégral* (IIe Partie) *et Applications*; 1902. 9 fr.

TANNERY (Jules), Sous-Directeur de l'École normale supérieure. — **Leçons d'Algèbre et d'Analyse** (*Mathématiques spéciales*). 2 volumes grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément.

Tome I : Volume de VII-423 pages, avec 47 figures et 166 exercices; 1906. 12 fr.

Tome II : Volume de 636 pages, avec 104 figures et 358 exercices; 1906. 12 fr.

TEYSSIER (R.), Licencié ès sciences, Ingénieur chimiste. — **Manuel-Guide de la Fabrication du sucre,** à l'usage des fabricants de sucre, directeurs et chimistes de sucrerie, etc., et plus spécialement des contremaîtres et

1..

surveillants de cette industrie. In-8 (23-14) de 425 pages avec 129 figures (*B. T.*); 1904. 9 fr.

TISSERAND (F.), Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes, Professeur à la Faculté des Sciences, Directeur de l'Observatoire de Paris. — **Traité de Mécanique céleste.** 4 beaux volumes in-4, se vendant séparément.

Tome I : *Perturbations des planètes d'après la méthode de la variation des constantes arbitraires*, avec figures; 1889. 25 fr.

Tome II : *Théorie de la figure des corps célestes et de leur mouvement de rotation*, avec figures; 1891. 28 fr.

Tome III : *Exposé de l'ensemble des théories relatives au mouvement de la Lune*, avec fig.; 1894. 22 fr.

Tome IV et dernier : *Théories des satellites de Jupiter et de Saturne. Perturbations des petites planètes*, avec figures; 1896. 28 fr.

TISSOT (Camille), Lieutenant de vaisseau. — **Étude de la résonance des systèmes d'antennes dans la télégraphie sans fil.** In-8 (23 × 14) de IV-204 pages, avec 49 figures; 1906. 5 fr.

TRÉPIED (Ch.) Directeur de l'Observatoire d'Alger. — **Tables et Cartes d'occultations.** *Théorie et applications.* Gr. in-4 (33 × 25) de LXXX-49 pages avec 7 pl.; 1905. Broché.... 12 fr. | Cartonné.. 15 fr.

VALLÉE-POUSSIN (Ch.-J. de la), Professeur à l'Université de Louvain. Correspondant de l'Académie royale de Belgique. — **Cours d'Analyse infinitésimale.** 2 volumes grand in-8 se vendant séparément.

Tome I : Volume de XIV-372 pages; 1903. 12 fr.
Tome II : Volume de XVI-440 pages; 1904. 15 fr.

VIDAL (Léon), Capitaine de vaisseau en retraite. — **Manuel pratique de Cinématique navale et maritime**, *à l'usage de la Marine de guerre et de la Marine du Commerce* (Ouvrage entrepris par ordre de M. le Ministre de la Marine). Grand in-8 (25 × 16) de VIII-171 pages avec 153 figures; 1905. 7 fr. 50 c.

VILLIÉ (E.), ancien Ingénieur des Mines, Docteur ès Sciences, Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille. — **Compositions d'Analyse, Cinématique, Mécanique et Astronomie** données depuis 1869 à la Sorbonne pour la *Licence ès Sciences mathématiques*, suivies d'Exercices sur les variables imaginaires. **Énoncés et Solutions.** 3 vol. in-8, avec fig., se vendant séparément.

Ire Partie : *Compositions données depuis* 1869. In-8; 1885. 9 fr.

IIe Partie : *Compositions données depuis* 1885. In-8; 1890. 8 fr. 50

IIIe Partie : *Compositions données depuis* 1889. In-8; 1898. 8 fr.

VIOLEINE (A.-P.). — **Nouvelles Tables pour les calculs d'Intérêts composés, d'Annuités et d'Amortissement.** 8e édition, entièrement refondue par *A. Arnaudeau*. In-4; 1903. 15 fr

VIVANTI (G.). — **Leçons élémentaires sur la théorie des groupes de transformations**, professées à l'Université de Messine, traduites par A. Boulanger, Maître de Conférences à l'Université de Lille. Grand in-8 (25 × 16) de VII-206 pages, avec figures; 1904. 8 fr.

WITZ (Aimé), Docteur ès Sciences, Ingénieur des Arts et Manufactures, Professeur aux Facultés catholiques de Lille. — **Cours élémentaire de manipulations de Physique**, *à l'usage des Candidats aux Écoles et au Certificat d'études physiques, chimiques et naturelles*. (P.C.N.). 2e éd., augm. In-8, avec 77 fig.; 1895. 5 fr.

— **Cours supérieur de manipulations de Physique**, *préparatoire aux certificats d'études supérieures et à la Licence* (École pratique de Physique). 2e édition, revue augmentée. In-8, avec 138 figures; 1897. 10 fr.

WOLF (C.), Membre de l'Institut, Astronome honoraire de l'Observatoire. — **Histoire de l'Observatoire de Paris, de sa fondation à 1793.** Grand in-8 de XII-392 pages avec 16 planches; 1902. 15 fr.

II. — COLLECTION

DES

ŒUVRES DES GRANDS GÉOMÈTRES.

BELTRAMI. — **Opere matematiche di Eugenio Beltrami**, pubblicate per cura della Facoltà di Scienze della R. Università.

Tomo I : In-4 de 337 pages avec un portrait de Beltrami; 1902. 25 fr.
Tomo II : In-4 de 468 pages; 1904. 25 fr.

BRIOSCHI (Francesco). — **Opere matematiche di Francesco Brioschi**, publicate per cura del comitato per le onoranze a Francesco Brioschi.

Tome I. In-4 de XI-416 pages, avec un portrait de Brioschi; 1901. 25 fr.
Tome II. In-4 de VIII-456 pages; 1902. 25 fr.
Tome III : In-4 de 435 pages; 1904. 25 fr.
Tome IV : In-4 de IX-418 pages; 1906. 25 fr.

CAUCHY (A.). — **Œuvres complètes d'Augustin Cauchy**, publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique, avec le concours de *C.-A. Valson*, *J. Collet* et *E. Borel*, docteurs ès Sciences. 27 volumes in-4.

Ire Série. — Mémoires, Notes et Articles extraits des Recueils de l'Académie des Sciences. 12 volumes in-4.

*Tome I, 1882 : *Théorie de la propagation des ondes à la surface d'un fluide pesant, d'une profondeur indéfinie. — Mémoire sur les intégrales définies.* — Tomes II et III : Mémoires extraits des *Mémoires de l'Académie des Sciences*. — *Tomes IV à XII (1884-1900); *Extraits des Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Chaque volume. 25 fr.

*La *Table générale de la Ire Série* se vend séparément. 2 fr. 50 c.

IIe Série. — Mémoires extraits de divers Recueils, Ouvrages classiques, Mémoires publiés en corps d'Ouvrage, Mémoires publiés séparément. 15 volumes in-4.

*Tome I. — Mémoires extraits du *Journal de l'École Polytechnique*. — Tome II. Mémoires extraits de divers recueils : *Journal de Liouville, Bulletin de Férussac, Bulletin de la Société philomathique, Annales de Gergonne, Correspondance de l'École Polytechnique*. — *Tome III, 1897 : *Cours d'Analyse de l'École royale Polytechnique*; *Tome IV, 1898 : *Résumé des Leçons données à l'École Polytechnique sur le Calcul infinitésimal. Leçons sur le Calcul différentiel*; *Tome V : *Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal à la Géométrie*; *Tomes VI à IX (1887 à 1891) : *Anciens Exercices de Mathématiques*; *Tome X, 1895 : *Résumés analytiques de Turin. Nouveaux Exercices de Prague*. Chaque volume. 25 fr.

Tomes XI à XIV. *Nouveaux exercices d'Analyse et de Physique*.

Tome XV. *Mémoires séparés*.

SOUSCRIPTION.

Ire Série. Tome II. — *Mémoires extraits des « Mémoires de l'Académie des Sciences »*. 20 fr.

Nota : Les volumes ne sont pas publiés d'après leur classement numérique; on suivra l'ordre qui intéressera le plus les souscripteurs.

Les volumes parus sont indiqués par un astérisque.

FERMAT. — **Œuvres de Fermat**, publiées par les soins de MM. *Paul Tannery* et *Charles Henry*, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique. In-4.

Tome I : *Œuvres mathématiques diverses. — Observations sur Diophante.* Avec 3 planches en photoglyptographie (portrait de Fermat fac-similé du titre de l'édition de 1670, et fac-similé d'une page de son écriture); 1891. 22 fr.

Tome II : *Correspondance de Fermat*; 1894. 22 fr.

Ce volume contient la Correspondance de Fermat avec Mersenne, Roberval, Pascal, Descartes, Huygens, etc.

Tome III : *Traduction des écrits latins de Fermat, du* « Commercium Epistolicum » *de Wallis, de l'* « Inventum novum » *de Jacques de Billy. — Supplément à la Correspondance*, 1896. 18 fr.

FOURIER. — Œuvres de Fourier, publiées par les soins de *Gaston Darboux*, Membre de l'Institut, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique.

Tome I : *Théorie analytique de la chaleur*. In-4, xxviii-564 pages; 1888. 25 fr.

Tome II : *Mémoires divers*. In-4, xvi-636 pages, avec un portrait de Fourier en héliogravure; 1890. 25 fr.

GALOIS. — Œuvres mathématiques d'Évariste Galois, publiées sous les auspices de la Société mathématique de France, avec une *Introduction* par Émile Picard, Membre de l'Institut. Grand in-8, avec un portrait de Galois en héliogravure; 1897. 3 fr.

HERMITE. — Œuvres de Charles Hermite, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par Émile Picard, Membre de l'Institut. Volumes grand in-8 (25 × 16) se vendant séparément.

Tome I : Volume de xl-500 pages, avec un portrait d'Hermite; 1905. 18 fr.

Tome II : (*Sous presse.*)

HUYGENS (C.). — Œuvres complètes de Christiaan Huygens, publiées par la Société hollandaise des Sciences. 10 volumes in-4, se vendant chacun. 35 fr.

Correspondance. — Tome I (1638-1656). — II (1657-1659). — III (1660-1661). — IV (1662-1663). — V (1664-1665). — VI (1666-1669). — VII (1670-1675). — VIII (1676-1684). — IX (1685-1690). — X (1691-1695).

LAGRANGE. — Œuvres complètes de Lagrange, publiées par les soins de *J.-A. Serret* et *G. Darboux*, Membres de l'Institut, sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique. In-4, avec un beau portrait de Lagrange, gravé sur cuivre par Ach. Martinet. (Ouvrage complet.)

La Iʳᵉ Série comprend tous les *Mémoires* imprimés dans les *Recueils des Académies de Turin, de Berlin et de Paris*, ainsi que les *Pièces diverses* publiées séparément. Cette Série forme 7 volumes (Tomes I à VII; 1867-1877), qui se vendent séparément. 30 fr.

La IIᵉ Série se compose de 7 vol., qui renferment les Ouvrages didactiques, la Correspondance et les Mémoires inédits; savoir :

Tome VIII : *Résolution des équations numériques*; 1879. 18 fr.

Tome IX : *Théorie des fonctions analytiques*; 1881. 18 fr.

Tome X : *Leçons sur le calcul des fonctions*; 1884. 18 fr.

Tome XI : *Mécanique analytique*, avec Notes de J. Bertrand et G. Darboux (Iʳᵉ Partie); 1888. 20 fr.

Tome XII : *Mécanique analytique*, avec Notes de J. Bertrand et G. Darboux (2ᵉ Partie); 1889. 20 fr.

Tome XIII : *Correspondance inédite de Lagrange et d'Alembert*, publiée d'après les manuscrits autographes et annotée par Ludovic Lalanne; 1882. 15 fr.

Tome XIV et dernier : *Correspondance de Lagrange avec Condorcet, Laplace, Euler et divers Savants*, publiée et annotée par Ludovic Lalanne, avec deux fac-similés; 1892. 15 fr.

LAGUERRE. — Œuvres de Laguerre publiées, sous les auspices de l'Académie des Sciences, par Ch. Hermite, H. Poincaré et E. Rouché, membres de l'Institut. 2 volumes grand in-8, se vendant séparément.

Tome I : *Algèbre. Calcul intégral*; 1898. 15 fr.

Tome II : *Géométrie*; 1905. 22 fr.

LAPLACE. — Œuvres complètes de Laplace, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par les *Secrétaires perpétuels*, avec le concours de *H. Poincaré*, Membre de l'Institut, et de *A. Lebeuf*, Directeur de l'Observatoire de Besançon. Nouvelle édition, avec un beau portrait de Laplace, gravé sur cuivre par *Tony Goutière*. In-4.

Traité de Mécanique céleste. Tomes I à V (1878-1882).

Tirage sur papier vergé, au chiffre de Laplace; 5 vol. in-4. 100 fr.
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace (à petit nombre), 5 vol. in-4 180 fr.
Les Tomes III, IV et V, papier vergé, se vendent séparément. 20 fr.
Les Tomes I à V, papier hollande, se vendent séparément. 36 fr.

Exposition du système du Monde. Tome VI (1884).

Tirage sur papier vergé, au chiffre de Laplace. 20 fr.
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace. 35 fr.

Théorie des probabilités. Tome VII (1886).

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace. 35 fr.
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace. 42 fr.

Mémoires divers. Tomes VIII à XIV.

Tomes VIII à XII. — *Mémoires extraits des Recueils de l'Académie des Sciences*; 1891-1898.

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace. Chaque vol. 20 fr.
Tirage sur papier de Hollande au chiffre de Laplace. Chaque vol. 25 fr.

Tome XIII. — *Mémoires extraits de la Connaissance des Temps*; 1904.

Tirage sur papier vergé fort, au chiffre de Laplace. 15 fr.
Tirage sur papier de Hollande, au chiffre de Laplace. 18 fr.

Le Tome XIV *et dernier* (Mémoires extraits de divers Recueils) *est sous presse.*

RIEMANN. — Œuvres mathématiques de Riemann, traduites par L. Laugel. Avec une Préface de Ch. Hermite et un Discours de Félix Klein. Grand in-8, avec figures; 1898. 14 fr.

ROBIN (G.), Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Paris. — **Œuvres scientifiques de Gustave Robin**, publiées sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique. Mémoires réunis et publiés par Louis Raffy, chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Paris. 2 volumes grand in-8 se vendant séparément.

Mathématiques : *Nouvelle théorie des fonctions, exclusivement fondée sur l'idée de nombre.* Un volume grand in-8; 1903. 7 fr.

Physique : Un volume grand in-8 en deux fascicules : *Physique mathématique.* (Distribution de l'Électricité, Hydrodynamique, Fragments divers). Un fascicule grand in-8; 1899. 5 fr.

Thermodynamique générale (Équilibre et modifications de la matière). Un fascicule grand in-8 avec 30 figures; 1901. 9 fr.

III. — COLLECTION DE TRADUCTIONS D'OUVRAGES SCIENTIFIQUES.

(*Voir*, pour les détails, le *Catalogue général.*)

AUERBACH (Dʳ F.). — La Dominatrice du monde et son ombre. *Conférence sur l'énergie et l'entropie.* In-16 (19 × 12) (allemand). 2 fr. 75 c.

BOLTZMANN (L.). — Leçons sur la théorie des gaz. 2 volumes grand in-8 (allemand).

Iʳᵉ Partie, avec figures. 8 fr.

IIᵉ Partie, avec figures. 10 fr.

BOYS (C.-V.). — **Bulles de savon.** In-18 jésus, avec 60 figures et 1 planche (anglais). 2 fr. 75 c.

CLEBSCH (C.). — **Leçons sur la Géométrie.** 3 vol. grand in-8, avec figures (allemand). 42 fr.
Tome I... 12 fr. | Tome II... 14 fr. | Tome III... 16 fr.

CREMONA. — **Les figures réciproques en Statique graphique.** Gr. in-8 et atlas de 34 pl. (italien). 5 fr. 50 c.

CUNDILL. — **Dictionnaire des Explosifs.** Grand in-8 (anglais). 6 fr.

EBERT (Dr H.). — **Guide pour le soufflage du verre.** Traduit sur la 2e édition et annoté par P. Lugol, Professeur de Physique au Lycée de Clermont-Ferrand. In-18 jésus, avec 63 fig. (allemand). 3 fr.

FAVARO. — **Leçons de Statique graphique.** 2 vol. grand in-8, avec 289 fig. et 2 planches (italien). 19 fr.
Tome I..... 7 fr. | Tome II.... 12 fr.

FIERZ (E.). — **Les recettes du distillateur.** In-18 jésus (allemand). 2 fr. 75 c.

FISHER et **DARBY.** — **Manuel élémentaire pratique de mesures électriques sur les câbles sous-marins.** In-8 avec 65 figures (anglais). 5 fr.

FLEMING. — **Le Laboratoire d'Électricité.** *Notes et formules* (anglais). In-8, avec figures.
Broché... 6 fr. | Cartonné... 7 fr. 50 c.

GRAY (John). — **Les machines électriques à influence.** In-8, avec 124 figures (anglais). 5 fr.

HERZBERG (Wilhelm). — **Analyse et Essais des papiers.** In-8 avec nombreuses figures et 2 planches (allemand). 5 fr.

JÜPTNER DE JONSTORFF. — **Traité pratique de Chimie métallurgique.** Grand in-8, avec 79 figures et 2 planches (allemand). 10 fr.

KEMPE. — **Traité pratique des mesures électriques.** In-8, avec 145 figures (anglais). 12 fr.

LEDEBUR. — **Technologie mécanique métallurgique.** Grand in-8 avec 729 figures (allemand). 25 fr.

LODGE. — **Les théories modernes de l'Électricité.** In-8, avec 53 figures (anglais). 5 fr.

LODGE. — **Sur les électrons.** In-16 (19 × 12) avec 7 figures; 1906 (anglais). 2 fr. 75 c.

LORENZ (Richard). — **Traité pratique d'Électrochimie.** In-8, avec 77 figures (allemand). 9 fr.

MAXWELL. — **Traité de l'Électricité et du Magnétisme.** 2 vol. gr. in-8, avec 122 fig. et 20 pl. (anglais). 30 fr.
Tome I... 15 fr. | Tome II... 15 fr.

— **Traité élémentaire d'Électricité.** In-8, avec figures (anglais). 7 fr.

OPPOLZER (I. d'). — **Traité de la détermination des orbites des comètes et des planètes.** Gr. in-8 (allemand). 20 fr.

OSTWALD (Prof. Dr W.). — **Éléments de Chimie inorganique** (allemand).
Ire Partie : *Métalloïdes.* Grand in-8. 15 fr.
IIe Partie : *Métaux.* Grand in-8. 15 fr.

PHILLIPS (H.-J.). — **Les Combustibles solides, liquides, gazeux.** *Analyse. Détermination du pouvoir calorifique.* In-18 jésus (anglais). 2 fr. 75 c.

PROCTOR (Richard). — **Nouvel Atlas céleste.** In-8, avec 12 cartes célestes et 2 planches (anglais).
Broché... 6 fr. | Cartonné... 7 fr.

RIEMANN. — **Œuvres mathématiques de Riemann.** Grand in-8 (allemand). 14 fr.

RUSSELL. — **Essai sur les fondements de la Géométrie.** Grand in-8 (anglais). 9 fr.

SALISBURY (Marquis de). — **Les limites actuelles de notre Science.** In-18 jésus (anglais). 1 fr. 50 c.

SALMON. — **Traité de Géométrie analytique (Courbes planes)** avec Appendice, par G. Halphen. In-8 (anglais). 12 fr.

— **Traité de Géométrie analytique à deux dimensions (Sections coniques).** 3e édition française (conforme à la 2e). In-8 (anglais). 12 fr.

— **Traité de Géométrie analytique à trois dimensions.** 3 vol. in-8 (anglais).
Tome I, 7 fr. — Tome II, 6 fr. — Tome III. 4 fr. 50 c.

— **Leçons d'Algèbre supérieure.** In-8 (anglais). 10 fr.

SANFORD (Gerald). — **Explosifs nitrés.** In-8, avec 51 figures et 1 planche frontispice (anglais). 6 fr.

SCHŒNFLIES. — **La Géométrie du mouvement. Exposé synthétique.** In-8 avec fig. (allemand). 6 fr. 50 c.

SCHWARZ (H.-A.). — **Formules et Propositions pour l'emploi des Fonctions elliptiques** *d'après des Leçons et des Notes manuscrites* de M. K. Weierstrass (allemand). In-4.
Broché...... 12 fr. | Cartonné.... 15 fr.

SERPIERI. — **Traité élémentaire des mesures absolues, mécaniques, électrostatiques et électromagnétiques, avec application à de nombreux problèmes.** In-8 (italien). 3 fr. 50 c.

SMITH (Edgar-F.). — **Analyse électrochimique.** In-18 jésus, avec 27 figures (anglais). 3 fr.

TAIT. — **Traité élémentaire des Quaternions.** 2 vol. gr. in-8, avec fig. (anglais). Chaque vol. séparément. 7 fr. 50 c.

— **Conférences sur quelques-uns des progrès récents de la Physique.** Gr. in-8, avec fig. (anglais). 7 fr. 50 c.

THOMSON (Sir William) [Lord Kelvin]. — **Constitution de la matière.** *Conférences scientifiques et allocutions.* (anglais). In-8, avec figures. 7 fr. 50 c.

THOMSON (J.-J.). — **Les décharges électriques dans les gaz.** In-8, avec 41 figures (anglais). 5 fr.

TYNDALL (John). — **La Chaleur.** *Mode de mouvement.* Avec 110 figures (anglais). 8 fr.

VIVANTI (G.). **Leçons élémentaires sur la théorie des groupes de transformations.** Grand in-8 avec figures (italien). 8 fr.

WEBER (H.). — **Traité d'Algèbre supérieure.** Grand in-8, avec figures (allemand). 22 fr.

WEIERSTRASS. — (*Voir* **SCHWARZ.**)

ZEUTHEN (H.-G.). — **Histoire des Mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge.** In-8, avec 31 figures (allemand). 9 fr.

Voir à la Bibliothèque photographique les traductions (format in-18 jésus et in-8) de *Burton, Cronenberg, Dallmeyer, Eder, Hesse, Liesegang, Robinson.*

IV. — BIBLIOTHÈQUE

DES

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES.

130 Ouvrages **in-18 jésus, ou petit in-8.**

(*Voir le prospectus spécial.*)

DERNIERS OUVRAGES PARUS :

Les Limites actuelles de notre Science. Discours présidentiel prononcé le 8 août 1894, par le Marquis de Salisbury, Premier Ministre d'Angleterre, devant la

British Association, dans sa session d'Oxford. Traduit par W. de Fonvielle. 1 fr. 50 c.

La Théorie atomique et la théorie dualistique, *Transformation des formules Différences essentielles entre les deux théories*, par Lenoble, Professeur de Chimie à l'Université libre de Lille. 2 fr.

Les Ballons-sondes et les ascensions internationales, par W. de Fonvielle, précédé d'une Introduction par Bouquet de la Grye, Membre de l'Institut. 2e édition, avec 27 figures. 2 fr. 75 c.

Les Recettes du distillateur, par E. Fierz. Traduit de l'allemand par E. Philippi. 2 fr. 75 c.

La Télégraphie sans fil, par A. Broca. 2e édition. 4 fr.

Analyse électrochimique, par Edg.-F. Smith. Traduit de l'anglais par J. Rosset. Avec 27 figures. 3 fr.

Une langue universelle est-elle possible? Exposé des moyens pour faire le choix et assurer le succès d'une langue scientifique et commerciale universelle, par L. Leau. 1 fr.

Leçons sur les moteurs à gaz et à pétrole faites à la Faculté des Sciences de Bordeaux; par L. Marchis. In-18 jésus de L-175 pages, avec 19 figures. 2 fr. 75 c.

Les Combustibles solides, liquides, gazeux. *Analyse et détermination du pouvoir calorifique.* Traduit de l'anglais par J. Rosset. In-18 jésus, avec 15 figures. 2 fr 75 c.

Traité élémentaire des enroulements des dynamos à courant continu; par F. Loppé. In-16 (19×12), avec fig. et planches. 2 fr. 75 c.

Le Radium et la Radioactivité. *Propriétés générales. Emplois médicaux*; par P. Besson. In-16 (19×12), avec 23 figures. 2 fr. 75 c.

Rayons « N ». Recueil des Communications faites à l'Académie des Sciences, par R. Blondlot. In-16 (19×12) avec figures et 1 planche écran phosphorescent. 2 fr.

Introduction à la Géométrie générale, par Georges Lechalas, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. In-16 (19×12) de IX-58 pages. 1 fr. 75 c.

La Dominatrice du monde et son ombre. Conférence sur l'énergie et l'entropie, par le Dr F. Auerbach. Traduction par le Dr Robert Tissot, et Préface de Ch. Ed. Guillaume. In-16 (19×12). 2 fr. 75 c.

La Construction des cadrans solaires. Ses principes, sa pratique, précédée d'une Histoire de la Gnomonique, par Abel Souchon. In-16 (19×12), avec figures et 2 planches. 2 fr. 75 c.

Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres, par Claude-Gaspar Bachet, sieur de Méziriac, 4e édition revue et simplifiée. Petit in-8 (19×12) de VI-163 pages; 1905. 3 fr. 50 c.

Le baromètre anéroïde, par Julien Loisel, Licencié ès sciences, Météorologiste à l'Observatoire de Juvisy. In-16 (19×12) de 34 pages avec 2 figures et 1 planche. 1 fr.

Les procédés de commande à distance au moyen de l'électricité, par Frilley. In-16 (19×12) de 183 p. avec 94 figures. 3 fr. 50 c.

V. — EXTRAIT DU CATALOGUE

DE LA

BIBLIOTHÈQUE PHOTOGRAPHIQUE.

(Demander le Catalogue complet.)

Agenda Lumière, pour 1906. Petit in-8 de 400 pages environ, cartonné. 1 fr.

Aide-Mémoire de Photographie, publié depuis 1876 sous les auspices de la Société photographique de Toulouse, par C. Fabre. In-18, avec figures et spécimens.

Broché.... 1 fr. 75 c. | Cartonné.. 2 fr. 25 c.

Les volumes des années précédentes, sauf 1877, 1878, 1879 1880 *et* 1883, *se vendent aux mêmes prix.*

Belin (Edouard), ancien Élève de l'Ecole impériale et royale de Photographie de Vienne. — *Manuel pratique de Photographie au charbon.* In-18 jésus avec 6 figures; 1900. 2 fr.

Belin (Édouard). — *Précis de Photographie générale.* 2 volumes grand in-8 se vendant séparément.

Tome I. Généralités, opérations photographiques. Volume de VIII-246 pages, avec 95 figures; 1905. 7 fr.

Tome II. Applications scientifiques et industrielles. Volume de 233 pages, avec 99 figures et 10 planches; 1905. 7 fr.

Berget (Alphonse), Docteur ès Sciences. — *La Photographie des Couleurs par la méthode interférentielle de M. Lippmann*, 2e édition entièrement refondue. In-18 jésus, avec 22 figures; 1901. 1 fr. 75 c.

Bernard (J.) et Touchebeuf (L.). — *Petits clichés et grandes épreuves.* Guide photographique du touriste cycliste. In-18 jésus; 1898. 2 fr. 75 c.

Braun fils (G. et Ad.). — *Dictionnaire de Chimie photographique à l'usage des professionnels et des amateurs.* Un volume grand in-8 de 546 pages. 1904; 12 fr.

Burton (W.-K.). — *A B C de la Photographie moderne.* Traduit de l'anglais sur la 12e édition par G. Huberson. 5e édition, revue et augmentée. In-18 jésus, avec fig., 1901. 3 fr.

Colson (R.). — *La Photographie sans objectif au moyen d'une petite ouverture.* Propriétés, usage, applications. 2e édition, revue et augmentée. In-18 jésus, avec planche spécimen; 1891. 1 fr. 75 c.

Courrèges (A.), Praticien. — *Ce qu'il faut savoir pour réussir en Photographie.* 3e édition revue et corrigée. In-16 (19×12). (*Sous presse*).

— *La retouche du cliché.* Retouche chimique, physique et artistique. In-18 jésus; 1898. 1 fr. 50 c.

— *Impression des épreuves sur papiers divers, par noircissement, par impression latente et développement.* In-18 jésus, avec figures; 1898. 2 fr.

— *Le portrait en plein air.* In-18 jésus, avec figures et 1 planche en photocollographie; 1899. 2 fr. 50 c.

— *La reproduction des gravures, dessins, plans, manuscrits.* In-18 jésus, avec figures; 1900. 2 fr.

— *Les agrandissements photographiques.* In-18 jésus, avec figures; 1901. 2 fr.

Coustet (E.). — *Le développement en pleine lumière.* In-16 (19×12) de VIII-53 pages; 1905. 1 fr. 50 c.

Cronenberg (Wilhelm), Directeur de l'École de Photographie et de reproduction photographique de Grönenbach. — *La Pratique de la Phototypogravure américaine.* Traduit et augmenté d'un *Appendice* par C. Féry, Chef des travaux pratiques à l'École de Physique et de Chimie industrielles. In-18 jésus avec 66 figures et 13 planches; 1898. 3 fr.

Dallmeyer (Thomas R.), Président de la *Royal Photographic Society*. — *Le Téléobjectif et la Téléphotographie* : Traduction française augmentée d'un appendice bibliographique; par L.-P. Clerc. Grand in-8 (25×16) avec 51 figures et 11 planches; 1903........... 6 fr.

Davanne. — *La Photographie. Traité théorique et pratique.* 2 beaux volumes grand in-8, avec 234 figures et 4 planches spécimens; 1886-1888. 32 fr
Chaque Volume se vend séparément 16 fr.

Davanne (A.), Bucquet (M.) et Vidal (Léon). — *Le Musée rétrospectif de la Photographie à l'Expo-*

sition universelle de 1900. Grand in-8 avec nombreuses figures et 11 planches; 1903. 5 fr.

Demarçay (J.). — *Note sur la théorie des obturateurs photographiques.* Grand in-8 (25 × 16) de IX-81 pages; 1906. 2 fr. 50 c.

Dillaye (Frédéric), *Principes et Pratique d'art en Photographie. Le Paysage.* Grand in-8, avec 32 figures et 34 photogravures de paysage; 1899. 5 fr.

Draux (F.). — *La Photogravure pour tous.* Manuel pratique. In-16 (19 × 12) de IV-68 pages; 1904. 1 fr. 50 c.

Eder (Dr J.-M.), Directeur de l'École impériale photographique de Vienne. — *Formules, Recettes et Tables pour la Photographie et les procédés de reproduction.* Édition revue par l'auteur; traduite de l'allemand par G. Braun fils. In-18 jésus; 1900. 4 fr.

Fabre (C.), Docteur ès Sciences. — *Traité encyclopédique de Photographie.* 4 beaux volumes gr. in-8, avec plus de 700 figures et 2 planches; 1889-1891. 48 fr.

Chaque volume se vend séparément 14 fr.

Des suppléments, destinés à exposer les progrès accomplis, viennent compléter ce Traité et le maintenir au courant des dernières découvertes.

- Ier *Supplément* (A). Gr. in-8 de 400 p., avec 176 figures; 1892. 14 fr.
- IIe *Supplément* (B). Gr. in-8 de 424 p. avec 221 figures; 1898. 14 fr.
- IIIe *Supplément* (C). Gr. in-8 de 424 p. avec 215 figures; 1902. 14 fr.
- IVe *Supplément* (D). Gr. in-8 de 424 p., avec nombreuses figures; 1906. 14 fr.

Les huit volumes se vendent ensemble 96 fr.

Fabre (C.). — *Les industries photographiques. Matériel. Procédés négatifs. Procédés positifs. Tirages industriels. Projections. Agrandissements.* Annexes. Grand in-8 (25 × 16) de 602 pages, avec 183 figures; 1903 .... 18 fr.

Fabre (C.). — *Traité pratique de Photographie stéréoscopique.* Grand in-8 (25 × 16) de 207 pages avec 132 figures; 1906. 6 fr.

Fabre (C.). *Guide du photographe débutant.* Brochure in-8 (18 × 12) de 35 pages; 1906. 0 fr. 75 c.

Ferret (l'abbé J.). — *La Photographie par le Collodion.* In-16 (19 × 12); 1903. 1 fr. 50 c.

Fourtier (H.). — *Dictionnaire pratique de Chimie photographique,* contenant une *Étude méthodique des divers corps usités en Photographie,* précédé de *Notions usuelles de Chimie* et suivi d'une Description détaillée des *Manipulations photographiques.* Gr. in-8, avec fig.; 1892. 8 fr.

Fourtier (H.). — *Les positifs sur verre.* Théorie et pratique. Les positifs pour projections. Stéréoscopes et vitraux. Méthodes opératoires. Coloriage et montage. 2e édition. In-16 (19 × 12) de 188 pages, avec 12 fig; 1907. 2 fr. 75 c.

Klary, Artiste photographe. — *La Photographie d'Art à l'Exposition universelle de* 1900. Grand in-8 avec de nombreuses illustrations et planches; 1901. 6 fr. 50 c.

— *Les portraits au crayon, au fusain et au pastel,* obtenus au moyen des agrandissements photographiques. Nouveau tirage (19 × 12); 1904. 2 fr. 50 c.

Londe (A.), Chef du service photographique à la Salpêtrière. — *La Photographie instantanée, Théorie et pratique.* 3e édition entièrement refondue. In-18 jésus, avec 65 figures; 1897. 2 fr. 75 c.

— *La Photographie à l'éclair magnésique.* Grand in-8 (25 × 16) de IX-99 pages, avec 23 figures et 8 planches; 1905. 4 fr.

Martel (E.-A.). — *La Photographie souterraine.* In-16 raisin avec 16 planches; 1903. 2 fr. 50 c.

Maskell (Alfred) et Demachy (Robert). — *Le procédé à la gomme bichromatée ou photo-aquateinte.* Traduit de l'anglais par G. Devanlay. 2e édition entièrement refondue par Robert Demachy. In-16 (19 × 12) de 86 p., avec 3 figures; 1905. 2 fr.

Massiot (G.). — *Les projections scientifiques et amusantes.* Brochure in-8 (23 × 14) de VI-48 pages; 1906. 1 fr. 75 c.

Mercier (P.), Chimiste, Lauréat de l'École supérieure de Pharmacie de Paris. — *Virages et fixages. Traité historique, théorique et pratique.* 2 vol. in-18 j.; 1892. 5 fr.

On vend séparément :

- Ire Partie : *Notice historique. Virages aux sels d'or.* 2 fr. 75 c.
- IIe Partie : *Virages aux divers métaux. Fixages.* 2 fr. 75 c.

Panajou, Chef du Service photographique à la Faculté de Médecine de Bordeaux. — *Manuel du photographe amateur.* 3e édit., entièrement refondue et considérablement augmentée. Petit in-8, avec 63 fig.; 1899. 2 fr. 75 c.

Pierre Petit fils (Auguste). — *La Photographie simplifiée et la lumière artificielle.* In-16 (19 × 12), avec 30 figures et 1 planche; 1903. 2 fr.

Piquepé (P.). — *Traité pratique de la Retouche des clichés photographiques,* suivi d'une *Méthode très détaillée d'émaillage* et *Formules et procédés divers.* Nouveau tirage. In-16 (19 × 12) de 124 pages; 1906. 2 fr. 75 c.

Puyo (C.). — *Notes sur la Photographie artistique.* Texte et illustrations. Plaquette de grand luxe in-4 raisin, contenant 11 héliogravures de Dujardin et 39 phototypogravures dans le texte; 1896. 10 fr.

Il reste quelques exemplaires sur Japon, avec planches également sur Japon. 20 fr.

Ris-Paquot. — *La préparation des plaques au gélatinobromure par l'amateur lui-même.* In-16 raisin avec 17 figures; 1903. 2 fr.

Rouyer (L.). — Lieutenant-Colonel du Génie, en retraite. — *Manuel pratique de Photographie sans objectif.* In-16 (19 × 12) avec 19 fig.; 1904. 2 fr. 50 c.

Sollet (Ch.). — *Traité pratique des tirages photographiques,* avec une Préface de C. Puyo. In-16 raisin de VIII-240 pages; 1902. 4 fr.

Trutat (E.), Directeur du Musée d'Histoire naturelle de Toulouse, Président de la section des Pyrénées Centrales du Club Alpin français, Président de la Société photographique de Toulouse. — *La Photographie animée,* avec une Préface de M. Marey, Membre de l'Institut. Grand in-8 avec 146 fig. et 1 pl.; 1899. 5 fr.

— *Dix Leçons de Photographie.* Cours professé au muséum de Toulouse. In-18 jésus avec figures; 1899. 2 fr. 75 c.

— *Les tirages photographiques aux sels de fer.* In-16 (19 × 12); 1904. 1 fr. 25 c.

Vidal (Léon), Officier de l'Instruction publique, Professeur à l'École nationale des Arts décoratifs. — *Traité pratique de Photochromie.* In-18 jésus avec 96 figures et 14 planches en couleurs; 1903. 7 fr. 50 c.

— *Traité pratique de Photogravure en relief et en creux.* In-18 jésus, avec 65 figures et 6 planches; 1900. 6 fr. 50 c.

Wallon (E.). Professeur de Physique au Lycée Janson de Sailly. — *Traité élémentaire de l'objectif photographique.* Grand in-8, avec 135 figures; 1891. 7 fr. 50 c.

— *Choix et usage des objectifs photographiques.* Petit in-8 avec 25 figures; 2e édition, 1903.

Broché........ 2 fr. 50. | Cartonné toile anglaise. 3 fr.

VI. — JOURNAUX.

(Les abonnements sont annuels et partent de Janvier.)

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE pour les Sciences mathématiques et les Sciences physiques, publiées sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique par un *Comité de rédaction composé des Professeurs de Ma-*

thématiques, de Physique et de Chimie de la Faculté. In-4, trimestriel.

Ire Série, 12 volumes in-4 (années 1887-1898) se vendant ensemble. 240 fr.

Chacun des Tomes I à XII (1887-1898) séparément 20 fr.

IIe Série, Tomes I à VII (1899-1905). Chaque année. 25 fr.

Prix pour un an (4 fascicules) :

Paris.......................... 25 fr.
Départements et Union postale. 28 fr.

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE, publiées par les *Facultés de Droit, des Sciences et des Lettres*, et par *l'École de Médecine*. Grand in-8.

Prix de l'abonnement (3 *numéros*) :

France........ 12 fr. | Étranger..... 15 fr.

Par exception, l'année 1889 ne comprend que les numéros du 1er juin et du 1er décembre; le prix de cette année est de 8 fr.

ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE MONTSOURIS. Météorologie. Chimie. Micrographie. Applications à l'hygiène.

Ces Annales, publiées sous la direction des chefs de service, paraissent régulièrement chaque trimestre par fascicule de 6 feuilles grand in-8 avec figures et planches.

Les *Annales de l'Observatoire municipal (Observatoire de Montsouris)* forment la suite naturelle des *Annuaires* parus de 1872 à 1900.

Prix pour un an (4 fascicules).

Paris.............15 fr. | Dép. et Union postale. 17 fr.

Le Tome I (1900) contient le résumé des travaux des années 1899-1900.

Les Tomes II à VI (1901-1905) contiennent le résumé des travaux des années 1901 à 1905.

Un fascicule spécimen est envoyé sur demande.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, publiées sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique, par un *Comité de Rédaction composé des Maîtres de Conférences*. In-4, mensuel.

1re Série, 7 volumes, années 1864 à 1870. 150 fr.

2e Série, 12 volumes, années 1872 à 1883. 250 fr.

3e Série, les 10 volumes formant les années 1884 à 1893, ensemble. 200 fr.

– Les 10 volumes formant les années 1894 à 1903, ensemble. 200 fr.

La **3e Série**, commencée en 1884, paraît, chaque mois, par numéro contenant 4 à 5 feuilles in-4, avec fig. et pl.

On vend séparément.

Chacune des années 1864 à 1870, 1872 à 1903. 25 fr.
Chaque année suivante........................ 30 fr.

Table des matières et noms d'auteurs contenus dans les 2 premières Séries. In-4; 1887.. .... 2 fr.

Table des matières et noms d'auteurs contenus dans les Tomes I à X de la troisième Série (1884-1893). In-4; 1894.. 1 fr.

Table des matières et noms d'auteurs contenus dans les Tomes XI à XX de la troisième Série (1894-1903). In-4; 1904. 1 fr

Prix pour un an (12 numéros) :

Paris.. 30 fr. | Départements et Union postale. 35 fr.

BIBLIOGRAPHIE SCIENTIFIQUE FRANÇAISE. — Recueil mensuel publié sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique par le Bureau français du Catalogue international de la littérature scientifique.

La *Bibliographie* est partagée en deux Sections : 1re Section, *Sciences mathématiques et physiques*; 2e Section, *Sciences naturelles et biologiques*.

Prix pour un an (12 numéros) :

	Paris.	Départ. et Union post. fr.
1re Section (6 numéros par an)....	5,50	6,50
2e Section (6 numéros par an).....	9,50	10,50
Les deux Séries réunies...........	15 »	17 »

Le numéro double 1-2 de l'année 1902, qui contient la liste des périodiques avec leurs abréviations et la classification scientifique, se vend séparément. 2 fr. 50 c.

BULLETIN ASTRONOMIQUE, publié par l'Observatoire de Paris. Commission de rédaction : *H. Poincaré*, président, *G. Bigourdan*, *P. Puiseux*, *R. Radau* et *H. Deslandres*. Grand in-8, mensuel.

Ce **Bulletin mensuel**, fondé en 1884, forme par an un beau volume grand in-8, avec figures et planches, de 30 à 35 feuilles.

Les dix premiers volumes (1884-1893) se vendent ensemble. 110 fr.

Les Tomes XI à XX (1894-1903) se vendent ensemble. 110 fr.

Chacun des Tomes I à XX (1884-1903) sauf le Tome XVI, 1899, séparément. 14 fr.
Chaque année suivante. 16 fr.

Prix pour un an (12 numéros) :

Paris.............................. 16 fr.
Départements et Union postale...... 18 fr.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ INTERNATIONALE DES ÉLECTRICIENS.

Ce Bulletin, fondé en 1884, paraît chaque année, en dix numéros, formant un beau volume de 30 feuilles environ, grand in-8 jésus.

L'abonnement est annuel et part de janvier.

Prix pour un an :

Paris.............................. 25 fr.
Départements et Union postale..... 27 fr.

Prix du numéro : 2 fr. 50 c.

Prix de chaque année depuis 1884.. 25 fr.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, publié par les Secrétaires. Grand in-8.

Ce *Bulletin*, fondé en 1873, paraît tous les trois mois; il forme chaque année un volume de 18 feuilles environ.

Prix pour un an :

Paris.............................. 15 fr.
Départements et Union postale...... 16 fr.
Chaque année depuis 1873.......... 15 fr.

Table des Tomes I à XX (1873-1892). Grand in-8; 1894. 1 fr. 75 c.

Table des Tomes XXI à XXX (1893 à 1902). Grand in-8; 1904. 1 fr.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE PHOTOGRAPHIE. — Gr. in-8, bimensuel. (Fondé en 1855.) 2e Série.

1re Série, 30 volumes, années 1855 à 1884. 250 fr.

Chaque année de la **1re Série**, sauf le Tome I (1855) et les Tomes XVII à XXX (1871-1884). 12 fr.

Chaque numéro séparément............ 1 fr. 50 c.

Tables décennales par ordre de matières et par noms d'auteurs.

Tomes I à X (1855 à 1864)............ 1 fr. 50 c.
Tomes XI à XX (1865 à 1874).......... 1 fr. 50 c.

La **2e Série**, commencée en 1885, a continué de paraître chaque mois par numéro de 2 feuilles jusqu'en 1891 et chacune des années séparées pendant cette période se vend 12 fr. — Depuis 1892, le *Bulletin* paraît deux fois par mois, et forme chaque année un beau volume de 30 feuilles avec planches spécimens et figures. Chaque Tome, à partir du Tome VIII (1892), se vend séparément. 15 fr. et les numéros séparés. 1 fr.

Prix pour un an (24 numéros) :

Paris et Départements. 15 fr. | Étranger. 18 fr.

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES, rédigé par *Gaston Darboux, E. Picard* et *Jules Tannery*. Grand in-8, mensuel. **IIe Série.**

La **1re Série**, Tomes I à XI, 1870 à 1876, suivie de la Table générale des onze années, se vend. 90 fr.
Chaque année de cette Ire Série se vend séparément. 15 fr.

Table générale des matières et noms d'auteurs contenus dans la 1re Série. Grand in-8; 1877. 1 fr. 50 c.

La **2e Série**, qui a commencé en janvier 1877, continue à paraître par livraisons mensuelles. Les 10 premières années de cette **2e Série** (1877 à 1886) se vendent ensemble. 120 fr.
Les 10 années suivantes (1887-1896) se vendent ensemble. 120 fr.
Chacune des 20 premières années de la **2e Série** (1877 à 1896) se vend séparément. 15 fr.
Chaque année suivante. 18 fr.

Prix pour un an (12 numéros) :

Paris.............................. 18 fr.
Départements et Union postale...... 20 fr.

La Table *d'un des volumes du* **Bulletin** *est envoyée franco, comme spécimen, à toute personne qui en fait la demande par lettre affranchie.*

BULLETIN MENSUEL DU BUREAU CENTRAL MÉTÉOROLOGIQUE DE FRANCE, publié par E. Mascart, Directeur du Bureau Central Météorologique. In-4, mensuel.

Prix pour un an :

Paris. 5 fr. | Départements et Union postale. 6 fr.
Chaque année, depuis 1895. 5 fr.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES. In-4, hebdomadaire.

Ces **Comptes rendus** paraissent régulièrement tous les dimanches, en un cahier de 32 à 40 pages, quelquefois de 80 à 120.

Prix pour un an (52 numéros et 2 Tables).
Paris. 30 fr. | Départements. 40 fr.
Union postale. 44 fr.

La *Collection complète*, de 1835 à 1905, forme 141 volumes in-4. 1765 fr.

Chaque année, sauf 1845, 1878 à 1892, 1896 à 1898, *se vend séparément.* 25 fr.

Chaque volume, sauf les Tomes 20, 21, 76 à 108, 110, 112, 114, 115, 122 à 127, *se vend séparément.* 15 fr.

— **Table générale des Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences**, par ordre de matières et par ordre alphabétique de noms d'auteurs. 4 vol. in-4, savoir :

Tables des tomes I à XXXI (1835-1850); 1853. 25 fr.
Tables des tomes XXXII à LXI (1851-1865); 1870. 25 fr.
Tables des tomes LXII à XCI (1866-1880); 1888. 25 fr.
Tables des tomes XCII à CXXI (1881-1895); 1900. 25 fr.

ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE (L'). — Revue internationale, paraissant tous les deux mois depuis janvier 1899, par fascicule de 80 pages in-8 raisin (25×16), sous la direction de MM. **C.-A. Laisant** et **H. Fehr**, avec la collaboration de M. **Buhl** et sous les auspices d'un Comité de patronage.

Abonnement : Union postale................. 15 fr.
Prix du numéro...................... 3 fr.
La collection des sept premiers volumes (1899 à 1905)...................... 84 fr.
Les Tomes I, III à VI sont en vente au prix de.................. 15 fr. l'un

JOURNAL DE CHIMIE PHYSIQUE. Électrochimie, Thermochimie, Radiochimie, Mécanique chimique, Stœchiochimie, publié par Philippe-A. Guye, Professeur de Chimie à l'Université de Genève, avec la collaboration de nombreux savants.

Cette publication paraît en huit ou dix numéros formant un volume annuel de 600 à 700 pages grand in-8 (25×16).

Prix de l'abonnement, pour toute l'Union postale. 25 fr.
Prix des volumes précédents, chacun............ 30 fr.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, publié par Camille Jordan, Membre de l'Institut, avec la collaboration de *M. Lévy, A. Mannheim, E. Picard, H. Poincaré*. In-4, trimestriel.

1re Série, 20 volumes in-4, années 1836 à 1855 (au lieu de 600 francs). 400 fr.
2e Série, 19 volumes in-4, années 1856 à 1874 (au lieu de 570 fr.). 380 fr.
3e Série, 10 volumes in-4, années 1875 à 1884 (au lieu de 300 fr.). 200 fr.
4e Série, 10 volumes in-4, années 1885 à 1894 (au lieu de 300 fr.). 200 fr.
5e Série, 10 volumes in-4, années 1895 à 1904. 200 fr.
Chacune des années 1836 à 1878, 1880 à 1904 se vend séparément. 25 fr.

La **6e Série**, commencée en 1905, se publie, chaque année, en 4 fascicules de 12 à 15 feuilles, paraissant au commencement de chaque trimestre.

Prix pour un an (4 fascicules) :

Paris.............................. 30 fr.
Départements et Union postale............ 35 fr.

— **Table générale des 20 volumes** de la **1re Série**. In-4. 3 fr. 50 c.

— **Table générale des 19 volumes** de la **2e Série**. In-4. 3 fr. 50 c.

— **Table générale des 10 volumes** de la **3e Série**. In-4. 1 fr. 75 c.

— **Table générale des 10 volumes** composant la **4e Série**, avec une Table générale des auteurs des 59 volumes des 4 premières séries (1836-1894). In-4. 1 fr. 75 c.

JOURNAL DE PHYSIQUE THÉORIQUE ET APPLIQUÉE, fondé par *d'Almeida* et publié par *E. Bouty, Lippmann, E. Mascart, L. Poincaré, A. Potier*, et MM. *Brunhes, Lamotte* et *G. Sagnac*, adjoints à la rédaction, avec la collaboration d'un grand nombre de professeurs et de physiciens. Grand in-8, mensuel.

Paris et Départements................. 17 fr.
Union postale......................... 18 fr.

— **Table analytique et Table par noms d'auteurs des trois premières séries (1872-1901)** dressées par MM. E. Bouty et B. Brunhes, avec la collaboration de MM. Bénard, Carré, Couette, Lamotte, Marchis, Maurain, Roy et Sandoz. Grand in-8. 10 fr.

L'INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS, dirigé par *C.-A. Laisant*, Docteur ès Sciences, ancien Élève de l'École Polytechnique, et *Émile Lemoine*, Ingénieur civil, ancien Élève de l'École Polytechnique, avec la collaboration de *Ed. Maillet*, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique, et *A. Grévy*, Professeur au Lycée Saint-Louis (publication honorée d'une souscription du Ministère de l'Instruction publique). In-8, mensuel.

Prix pour un an (12 numéros) :

Paris, 7 fr. — Départements et Union postale, 8 fr. 50 c.
Les Tomes I à X (1894-1903) se vendent ensemble. 60 fr.
Les Tomes II à XI (1894-1904) se vendent chacun. 7 fr.
Le Tome I (1894) ne se vend pas séparément.

MÉMORIAL DES POUDRES ET SALPÊTRES, publié par les soins du Service des poudres et salpêtres, avec l'autorisation du Ministre de la Guerre. Grand in-8.

Le *Mémorial* paraît sous forme de Recueil périodique, en deux fascicules semestriels, et forme, tous les deux ans, un beau volume de 24 feuilles environ, avec figures.
Collection des Tomes I à XII (1883-1905). (*Rare.*)
Chacun des Tomes III, V à XIII se vend séparément. 12 fr.
Les Tomes I, II et IV ne se vendent pas séparément.

Prix de l'abonnement pour un volume (4 fascicules)
Paris...................... 8 fr.
Départements et Union postale.... 9 fr.

LE MONITEUR DE LA PHOTOGRAPHIE. Directeur: *Charles Gravier*. Gr. in-8 illustré. Mensuel. 3e Série, Tome I (44e année).

La **3e Série** (grand in-8) paraît mensuellement, depuis 1906.

Prix de l'abonnement (12 numéros).
Paris et Départements : 1 fr. 50 c.
Etranger : 5 fr.
Chaque numéro se vend séparément 0 fr. 15 c.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES. Journal des Candidats aux Écoles Polytechnique et Normale, rédigé par *C.-A. Laisant*, Docteur ès Sciences, Professeur à Sainte-Barbe, Répétiteur à l'Ecole Polytechnique, *C. Bourlet*, Docteur ès Sciences, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, et *R. Bricard*, Répétiteur à l'Ecole Polytechnique. In-8 mensuel.

1re Série, 20 vol. in-8, années 1842 à 1861. 300 fr.
Les Tomes I à VII et XVI (1842-1848 et 1857) ne se vendent pas séparément. Les autres Tomes de la 1re Série se vendent séparément. 15 fr.

2e Série, 20 vol. in-8, années 1862 à 1881. 300 fr.
Les Tomes I à III, V et XIX (1862 à 1864, 1866, 1880) de la 2e Série ne se vendent pas séparément.
Les autres Tomes se vendent séparément. 15 fr.

3e Série, 19 vol. in-8, années 1882 à 1900. 285 fr.
Les Tomes I à XIX (1882 à 1900) de la 3e Série se vendent séparément. 15 fr.

La **4e Série,** commencée en 1901, continue de paraître chaque mois par cahier de 48 pages au moins.

Prix pour un an (12 *numéros*) :
Paris.. 15 fr. | Départements et Union postale. 17 fr.

REVUE ÉLECTRIQUE (La), publiée sous la direction de J. Blondin.

La *Revue électrique* paraît deux fois par mois, par fascicules de 32 pages in-4 (28 × 22). Elle forme par an 2 volumes de plus de 400 pages.

Prix de l'abonnement (24 *numéros*) :
Paris .... 25 fr.
Départements .... 27 fr. 50 c.
Union postale .... 30 fr.

Prix du numéro : 1 fr. 50 c.

Les Tomes I à V (1904-1906) se vendent chacun 11 fr.

REVUE SEMESTRIELLE DES PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES, rédigée sous les auspices de la Société Mathématique d'Amsterdam. Grand in-8, paraissant en 2 fascicules (fondé en 1893).

Prix pour un an :
Paris, Départements et Union postale : 8 fr. 50 c.
(Port en sus : 0 fr. 60 c.).

Chacune des années antérieures, à partir de 1893 (sauf le Tome III). (Port en sus : 0 fr. 60 c.). 8 fr. 50 c.

VII. — RECUEILS SCIENTIFIQUES.

ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS, publiées par M. *Maurice Lœwy*, Directeur. **Mémoires,** Tomes I à XXIV. In-4, avec planches ; 1855-1904.

Les Tomes I à X, XII, XIII et XV à XXIV se vendent séparément. 27 fr.
Le Tome XI (1876) et le Tome XIV (1877) comprennent deux *Parties* qui se vendent séparément. 20 fr.
Le Tome XXV est *sous presse*.

ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS, publiées par M. *Maurice Lœwy*, Directeur. **Observations** :

Tomes I à XXIV (Observations des années 1800 à 1829 et 1837 à 1869); chaque volume. 40 fr.
Années 1870 à 1890, 1897 à 1902. Chaque année. 40 fr.
Les observations des années 1891 à 1896 paraîtront ultérieurement.

ANNALES DU BUREAU CENTRAL MÉTÉOROLOGIQUE DE FRANCE, publiées par *E. Mascart*, Directeur.

Les Annales *ont formé, par an, de 1878 à 1885, quatre volumes grand in-4 avec planches* (*voir* pour les détails le Catalogue général).

Depuis l'année 1886, *les* Annales du Bureau central *forment trois volumes par an :*

I. — **Mémoires.** Grand in-4 avec planches.
Années : 1886 à 1903. Chaque volume. 15 fr.
II. — **Observations.** Grand in-4.
Années : 1886 à 1903. Chaque volume. 15 fr.
III. — **Pluies en France.** Grand in-4. Années : 1886 à 1896. Chaque volume. 15 fr.
Années 1897 à 1904, avec 4 pl. chacune. Chaque volume. 10 fr.

Table générale par noms d'auteurs des Mémoires contenus dans les Tomes I à IV des Annales du Bureau central météorologique *pour les* 23 *premières années* (1878-1900). Grand in-4 de 26 pages; 1903. 1 fr. 50 c.

ANNALES DU BUREAU DES LONGITUDES. Travaux faits à l'observatoire astronomique de Montsouris, et Mémoires divers.

Tome I. In-4, avec une planche sur acier donnant la vue de l'Observatoire; 1877. 25 fr.
Tome II. In-4; 1882. 25 fr.
Tome III. In-4; 1883. 25 fr.
Tome IV. In-4; avec 2 pl.; 1890. 25 fr.
Tome V. In-4; avec 4 pl.; 1897. 25 fr.
Tome VI. In-4; avec 8 pl.; 1903. 25 fr.

ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE BORDEAUX, publiées par *Rayet*, Directeur de l'Observatoire.

Tome I. In-4, avec figures et un plan de l'Observatoire; 1885. 30 fr.
Tome II, avec figures; 1887. 30 fr.
Tome III, avec 3 planches; 1889. 30 fr.
Tome IV à XII; 1892-1906. Chaque volume. 30 fr.

ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE TOULOUSE, publiées par *B. Baillaud*, Directeur de l'Observatoire.

Tome I (travaux exécutés de 1873 à 1878). In-4 avec planche; 1880. 30 fr.
Tome II (travaux exécutés de 1879 à 1884). In-4; 1886. 30 fr.
Tome III (travaux exécutés de 1884 à 1897). In-4; 1899. 30 fr.
Tome IV (travaux exécutés de 1891 à 1900). In-4; 1901. 30 fr.
Tome V (travaux exécutés en 1900). In-4; 1902. 30 fr.

ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE NICE, publiées sous les auspices du *Bureau des Longitudes*, par *A. Perrotin*, Directeur (Fondation R. Bischoffsheim).

Tome I. Grand in-4 avec Atlas de 44 planches sur cuivre; 1899. 40 fr.
Tome II. Grand in-4, avec 7 belles planches, dont 3 en couleur; 1887 .... 30 fr.
Tome III. Gr. in-4, avec 1 pl. et Atlas contenant 17 belles pl. (spectre solaire de M. Thollon); 1890. 40 fr.
Tomes IV à X. Gr. in-4; 1895 à 1905. Ch. vol. 30 fr.

ANNUAIRE pour l'an 1907, publié par le Bureau des Longitudes, contenant les Notices suivantes :

Le diamètre de Vénus, par A. Bouquet de la Grye. — *Histoire des idées et des recherches sur le Soleil. Révélation récente de l'atmosphère entière de l'astre*, par H. Deslandres. *La XVe Session de l'Association géodésique internationale*, par A. Bouquet de la Grye.

In-18 carré de plus de 800 pages.

Broché.. 1 fr. 50 c. | Cartonné...... 2 fr.

Pour recevoir l'Annuaire franco ajouter 35 c.

CATALOGUE PHOTOGRAPHIQUE DU CIEL (Observatoire de Paris). — **Coordonnées rectilignes.** Tome I. Zone + 23° à + 25°. Grand in-4 de [52]-306 pages. 1902. 40 fr.

CATALOGUE PHOTOGRAPHIQUE DU CIEL. (OBSERVATOIRE D'ALGER). — **Coordonnées rectilignes,** Introduction par CH. TRÉPIED, Directeur de l'observatoire. grand in-4° de CXXXVI pages; 1903. 15 fr.

TOME V, Zone — 1° à 1° (1er fascicule de 0^h à 6^h56^m). Grand in-4° de IV-72 pages; 1903. 8 fr.
TOME VI : Zone — 2° à 0° (1er fascicule de 0^h à 4^h28^m). Grand in-4° de 34 pages; 1903. 3 fr.
TOME VII : Zone — 3° à — 1° (1er fascicule de 0^h à 6^h8^m). Grand in-4° de 48 pages; 1903. 5 fr.

CATALOGUE PHOTOGRAPHIQUE DU CIEL (OBSERVATOIRE DE BORDEAUX). — **Coordonnées rectilignes.** Volume grand in-4 (33 × 25).

TOME I. Zone +16° à +18°. Volume de 89-212 pages; 1905. 40 fr.

CATALOGUE PHOTOGRAPHIQUE DU CIEL (OBSERVATOIRE DE TOULOUSE), *Coordonnées rectilignes.* Volumes grand in-4 (33 × 25).

TOME II, Zone + 8° à + 10° (1er fascicule de 0^h à 6^h8^m). Vol de VI-40 pages; 1904. 12 fr.
TOME IV, Zone + 6° à + 8° (1er fascicule de 0^h à 6^h32^m). Vol. de VI-52 pages; 1904. 10 fr.
TOME VI, Zone + 4° a + 6° (1er fascicule de 0^h à 6^h8^m). Vol. de VI-42 pages; 1904. 10 fr.
TOME VII, Zone + 10° a + 12° (1er fascicule de 0^h à 6^h0^m). Vol. de XIII-41 pages; 1904. 6 fr.
— Observations d'Eros (3e fascicule). Volume de XXIV-82 pages; 1906. 12 fr.

CONNAISSANCE DES TEMPS ou des mouvements célestes, à l'usage des Astronomes et des Navigateurs, pour l'an 1908, publiée par le *Bureau des Longitudes.* Gr. in-8 de VIII-925 pages, avec 2 cartes en couleur; 1905.
Broché... 4 fr. | Cartonné... 4 fr. 75 c.
Pour recevoir l'Ouvrage franco dans les pays de l'Union postale, ajouter 1 fr.
Le volume pour l'année 1909 paraîtra en janvier 1907.

EXTRAIT DE LA CONNAISSANCE DES TEMPS, à l'usage des Écoles d'Hydrographie et des marins du Commerce, pour l'an 1907, publié depuis l'an 1889 par le *Bureau des Longitudes.* Grand in-8; 1905. 1 fr. 50 c.

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, publié par le Conseil d'instruction de cet établissement.

Ire Série, 64 Cahiers in-4, avec figures et pl..... 1000 fr.
Table des matières et noms d'auteurs des 64 Cahiers de la Ire Série. In-4; 1896. 3 fr.
IIe Série. Cahiers I à III, 1895 à 1897, chaque Cahier. 10 fr.
IVe Cahier, 1898. 13 fr.
Ve et VIe Cahiers, 1900, 1901, chaque Cahier. 10 fr.
VIIe Cahier, 1902. 12 fr.
VIIIe Cahier, 1903. 10 fr.
IXe Cahier, 1904. 10 fr.
Xe Cahier, 1905. 10 fr.
XIe Cahier, 1906. 11 fr.

VIII. — ENCYCLOPÉDIE DES TRAVAUX PUBLICS, ET ENCYCLOPÉDIE INDUSTRIELLE,

FONDÉES PAR M.-C. LECHALAS,
Inspecteur général
des Ponts et Chaussées en retraite.

ALHEILIG, Ingénieur de la Marine, Ex-Professeur à l'École d'application du Génie maritime, et **ROCHE** (Camille), Industriel, ancien Ingénieur de la Marine. — **Traité des machines à vapeur,** rédigé conformément au programme du *Cours de machines à vapeur de l'École Centrale.* Deux volumes grand in-8°, se vendant séparément. (E. I.)

TOME I : *Thermodynamique théorique et applications. La machine à vapeur et les métaux qui y sont employés. Puissance des machines, diagrammes indicateurs. Freins. Dynamomètres. Calcul et dispositions des organes d'une machine à vapeur. Régulation, épures de détente et de régulation. Théorie des mécanismes de distribution, détente et changement de marche. Condensation, alimentation. Pompes de service.* Vol. de XI-604 p., avec 412 fig.; 1895. 20 fr.

TOME II : *Forces d'inertie. Moments moteurs. Volants. Régulateurs. Description et classification des machines à vapeur. Machines marines. Moteurs à gaz, à pétrole et à air chaud. Graissage, joints et presse-étoupes. Montage des machines. Essais des moteurs. Passation des marchés. Prix de revient d'exploitation et de construction. Annexe : Note sur les servo-moteurs. Tables numériques.* Volume de IV-560 pages, avec 281 figures; 1895. 18 fr.

APPERT (Léon) et **HENRIVAUX** (Jules), Ingénieurs. — **Verre et verrerie.** Grand in-8, de 460 pages avec 130 fig. et un Atlas de 14 planches in-4; 1894 (E. I.). 20 fr.

BEAUVERIE (J.), Docteur ès sciences, chargé d'un Cours et des Travaux pratiques de Botanique appliquée à l'Université de Lyon, Préparateur de Botanique générale. — **Le Bois.** *Structure. Rapports entre la structure et les qualités du bois d'œuvre. Composition et propriétés chimiques. Caractères et propriétés physiques. Production des bois. La forêt. Abatage des bois. Altérations et défauts des bois d'œuvre. Conservation des bois. Étude spéciale des bois utiles et des essences qui les produisent. Bois indigènes et bois exotiques. Le liège. La production du bois dans le monde. Bois des colonies françaises. Utilisation des bois.* Avec une Préface de M. DAUBRÉE, Conseiller d'État, Directeur général des Eaux et Forêts au Ministère de l'Agriculture. Un volume en deux fascicules grand in-8 (25 × 16) de XI-1402 p., avec 485 fig. (E. I.), 1905. (Médaille de la Société nationale d'agriculture). 20 fr.

COLSON (C.), Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Conseiller d'État. — **Cours d'Économie politique** professé à l'École nationale des Ponts et Chaussées, 3 vol. grand in-8 se vendant séparément (E. T. P.).

TOME I : *Exposé général des phénomènes économiques. Le travail et les questions ouvrières.* Volume de 596 p.; 1901. 10 fr.

TOME II : *La propriété des biens corporels et incorporels. Le Commerce et la circulation.* Volume de 774 pages; 1903. 10 fr.

TOME III (Ire Partie) : *Les finances publiques et le budget de la France.* Volume de 442 pages; 1905. 6 fr.

TOME III (IIe Partie) : *Les travaux publics.*
(*En préparation.*)

CRONEAU (A.), Ingénieur de la Marine, Professeur à l'École d'application du Génie maritime. — **Architecture navale. — Construction pratique des navires de guerre.** 2 volumes grand in-8 et un Atlas de 11 planches (E. I.)

TOME I : *Plans et devis. — Matériaux. — Assemblages. Différents types de navires. — Charpente. — Revêtement de la coque et des ponts.* Grand in-8, de 339 pages avec 305 figures et un Atlas de 11 planches in-4 doubles dont 2 en trois couleurs; 1894. 18 fr.

TOME II : *Compartimentage. — Cuirassement. — Pavois et garde-corps. — Ouvertures pratiquées dans la coque, les ponts et les cloisons. — Pièces rapportées sur la coque. — Ventilation. — Service d'eau. — Gouvernails. — Corrosion et salissure. — Poids et résistance des coques.* Grand in-8 de 616 pages, avec 359 figures; 1894. 15 fr.

DEHARME (E.), Ingénieur de la Compagnie du Midi, Professeur du Cours de Chemins de fer à l'Ecole Centrale, et **PULIN** (A.), Ingénieur des Arts et Manufactures, Inspecteur principal du Chemin de fer du Nord. — **Chemins de fer. Matériel roulant. Résistance des trains. Traction.** Un volume grand in-8 de XXII-441 pages, avec 95 figures et 1 planche; 1895 (E. I.). 15 fr.

— **Étude de la Locomotive. La Chaudière.** Gr. in-8 de VI-608 p., avec 131 fig. et 2 pl.; 1900 (E. I.) 15 fr.

— **Étude de la Locomotive. Mécanisme. Châssis. Types de machines.** Un volume grand in-8 de IV-712 p., avec 288 fig. et un atlas in-4 de 18 pl.; 1903 (E. I.). 25 fr.

DENFER (J.), Architecte, Professeur à l'Ecole Centrale. — **Charpenterie métallique.** *Menuiserie en fer et serrurerie.* 2 volumes grand in-8. (E. T. P.)

Tome I : *Généralités sur la fonte, le fer et l'acier. — Résistance de ces matériaux. — Assemblage des éléments métalliques. — Chaînages, linteaux et poitrails. — Planchers en fer. — Supports verticaux. — Colonnes en fonte. Poteaux et piliers en fer.* Gr. in-8, de 584 pages et 479 fig.; 1894. 20 fr.

Tome II : *Pans métalliques. — Combles. — Passerelles et petits ponts. — Escaliers en fer. — Serrurerie : Ferrements des charpentes et menuiseries. — Paratonnerres. — Clôtures métalliques. — Menuiserie en fer. — Serres et vérandas.* Grand in-8 de 626 pages avec 571 figures; 1894. 20 fr.

FABRE (C.), Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse. — **Les Industries photographiques.** Un volume grand in-8 de 584 pages, avec 183 figures; 1904. (E. I.). 18 fr.

FÉRET (R.), ancien Élève de l'École Polytechnique, Chef du Laboratoire des Ponts et Chaussées à Boulogne-sur-Mer. — **Etude expérimentale du Ciment armé.** Expériences. Théorie et calculs. Bibliographie du Ciment armé. Recherches annexées sur les diverses résistances des mortiers et bétons. Grand in-8 de VI-778 p. avec 197 fig.; 1906. 20 fr

FÖPPL (Aug.), Professeur à l'Université technique de Mulhouse. — **Résistance des matériaux et éléments de la théorie mathématique de l'Elasticité.** Traduit de l'allemand par E. Hahn, Ingénieur diplômé de l'École Polytechnique de Zurich. Grand in-8 de 489 p., avec 74 figures; 1901. (E. I.) 15 fr.

GESCHWIND (Lucien), Ingénieur chimiste. — **Industries du sulfate d'aluminium, des aluns et des sulfates de fer.** *Etude théorique de l'aluminium, du fer et de leurs composés. Fabrication du sulfate d'aluminium, des aluns et des sulfates de fer. Applications industrielles des sulfates d'aluminium et de fer. Caractères analytiques du fer et de l'aluminium. Dosages. Méthodes d'analyse.* Grand in-8, de VIII-364 pages, avec 195 figures; 1899. (E.I.) 10 fr.

GESCHWIND (L.), Ingénieur-Chimiste, et **SELLIER** (E.), Chimiste, Lauréats des Chimistes de sucrerie et de la Société industrielle de Saint-Quentin. — **La betterave agricole et industrielle.** Grand in-8 de IV-668 pages avec 130 figures; 1902. (E. I.). 20 fr.

GOUILLY (Alexandre), Ingénieur des Arts et Manufactures, Répétiteur de Mécanique appliquée à l'École Centrale. — **Éléments et organes des machines.** Un vol. grand in-8 de 406 pages avec 710 fig.; 1894. (E. I.) 12 fr.

GUÉDON (Pierre), Ingénieur, Chef de traction à la Compagnie générale des Omnibus de Paris. — **Traité pratique des Chemins de fer d'intérêt local et des Tramways.** Grand in-8 de 393 pages avec 141 figures; 1901. (E. I.) 11 fr.

GUIGNET (Ch.-Er.), Directeur des teintures aux Manufactures nationales des Gobelins et de Beauvais; **DOMMER** (F.), Professeur à l'Ecole de Physique et de Chimie industrielles de la ville de Paris, et **GRAND-MOUGIN** (E.), Ancien préparateur à l'École de Chimie de Mulhouse. — **Blanchiment et apprêts. Teinture et impression. Matières colorantes.** Un volume grand in-8 de 674 pages, avec 345 figures et échantillons de tissus imprimés; 1895. (E. I.) 30 fr.

HUBERT-VALLEROUX (P.), Avocat à la Cour de Paris, Docteur en Droit. — **Les Associations ouvrières et les Associations patronales.** (Cet ouvrage a obtenu le premier prix au concours *de Chambrun*, 1898.) Grand in-8 de 361 pages; 1899. (E. I.) 10 fr.

JOANNIS (A.), Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux, Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Paris. — **Traité de Chimie organique appliquée.** (E.I.) 2 volumes grand in-8 se vendant séparément.

Tome I : Volume de 688 p., avec fig.; 1896. 20 fr.
Tome II : Volume de 718 p., avec fig.; 1896. 15 fr.

LAPPARENT (Henri de), Inspecteur général de l'Agriculture. — **Le vin et l'eau-de-vie de vin.** *Introduction. Influence des cépages, des climats, des sols, etc., sur la qualité du vin. Le raisin, les vendanges, vinification, cuveries et chais. Le vin après le décuvage. Eau-de-vie. Économie et législation.* Gr. in-8 de 542 p. avec 111 fig. et 28 cartes dans le texte; 1895. (E. I.) 12 fr.

LECHALAS (Georges), Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées. — **Manuel de droit administratif.** *Service des Ponts et Chaussées et des Chemins vicinaux.* 2 volumes grand in-8, se vendant séparément. (E. T. P.)

Tome I : *Notions sur les trois pouvoirs. Personnel des Ponts et Chaussées. Principes d'ordre financier. Travaux intéressant plusieurs services. Expropriations. Dommages et occupations temporaires.* Grand in-8 de CXLVII-536 pages; 1889. 20 fr.

Tome II (Ire Partie): *Participation des tiers aux dépenses des travaux publics. Adjudications. Fournitures. Régie. Entreprises. Concessions.* Gr. in-8 de 397 p.; 1893. 10 fr.

— IIe Partie : *Principes généraux de police : Grande voirie. Simple police. Roulage. — Domaine public : Consistance et condition juridique. Délimitation. Redevances et perceptions diverses. Produits naturels. Concessions. Occupations temporaires.* Gr. in-8; 1898. 10 fr.

LE VERRIER (U.), Ingénieur en chef des Mines, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers. — **Métallurgie générale.** Volumes grands in-8 (25×16) se vendant séparement.

— **Procédés de chauffage.** *Combustibles solides. Description des combustibles. Combustibles artificiels. Emploi des combustibles. Chauffage par l'électricité. Matériaux réfractaires. Organisation d'une usine métallurgique. Données numériques.* Volume de 367 pages avec 171 fig; 1903. (E. I.) 12 fr.

— **Métallurgie générale. Procédés métallurgiques et étude des métaux.** *Minerais. Séchage. Calcination. Grillage. Opérations extractives. Fusion et affinage. Thermochimie. Installations accessoires. Essais mécaniques. Action de la chaleur. Métallographie. Alliages annexes.* Volume de 403 pages, avec 194 figures; 1905. (E. I.) 12 fr.

LORENZ (H.), Ingénieur, Professeur à l'Université de Halle. — **Machines frigorifiques.** *Production et applications du froid artificiel.* Traduit de l'allemand par P. Petit, Professeur à la Faculté des Sciences de Nancy, Directeur de l'Ecole de Brasserie, et J. Jaquet, Ingénieur civil. Grand in-8 de IX-186 pages, avec 131 figures; 1898. (E. I.) 7 fr.

MARTENS (A.), Directeur du Laboratoire royal d'essais de Berlin-Charlottenbourg. — **Traité des essais des matériaux destinés à la construction des machines.** *Méthodes, Machines, Instruments de mesure.* Traduit de l'allemand avec Notes et Annexes, par Pierre Breuil, Chef de la Section des Métaux au Laboratoire

d'essais du Conservatoire national des Arts et Métiers, ancien Directeur du Laboratoire d'essais de la Cie P.-L.-M. Grand in-8 (25 × 16) de 671 pages, avec 558 figures et atlas (25 × 16) de 31 planches; 1904. 50 fr.

MASONI (U.), Directeur et Professeur de l'Institut d'Hydraulique à l'École royale des Ingénieurs de Naples. — **L'énergie hydraulique et les récepteurs hydrauliques.** Grand in-8 (25 × 16) de IV-320 pages, avec 207 figures; 1905. (E. I.) 10 fr.

MEUNIER (Louis), Chef des travaux de Chimie à l'Université de Lyon, Professeur à l'École française de Tannerie, et **VANEY (Clément)**, agrégé de l'Université, Docteur ès Sciences, Professeur à l'École française de Tannerie. — **La Tannerie.** *Étude. Préparation et essai des matières premières. Théorie et pratique des différentes méthodes actuelles de tannage. Examen des produits fabriqués.* Volume publié sous la direction de Léo Vignon, Professeur à l'Université de Lyon, Directeur de l'École de Chimie industrielle et de l'École française de Tannerie. Grand in-8 de 648 pages avec 98 figures; 1903. (E. I.) 20 fr.

NIEWENGLOWSKI (Paul), Ingénieur du corps des Mines. — **Précis d'Électricité.** Grand in-8 (25 × 16) de II-200 pages, avec 64 figures; 1906. 6 fr.

OCAGNE (Maurice d'), Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique. — **Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale.** Gr. in-8 de XI-428 pages, avec 340 fig.; 1896. (E.T.P.) 12 fr.

ROUCHÉ (Eugène), Membre de l'Institut, Professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, Examinateur de sortie à l'École Polytechnique, et **LEVY (Lucien)**, Répétiteur d'Analyse et Examinateur d'admission à l'École Polytechnique. — **Analyse infinitésimale** *à l'usage des Ingénieurs.* 2 volumes grand in-8, se vendant séparément. (E. T. P.)

Tome I : **Calcul différentiel.** *Dérivées et différentielles. Changements de variables. Séries. Formules de Taylor. Courbes planes et gauches. Surfaces. Congruences. Complexes. Lignes tracées sur les surfaces.* Volume grand in-8 de XIII-557 pages, avec 45 figures; 1900. 15 fr.

Tome II : **Calcul intégral.** *Intégrales indéfinies et définies. Séries de Fourier. Fonctions elliptiques. Équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles. Calcul des variations.* Volume in-8 de 829 pages; 1903. 15 fr.

SCHŒLLER (A.) Ingénieur des Arts et Manufactures, Chef adjoint des services commerciaux à la Compagnie du Nord, et **FLEURQUIN (A.)**, Inspecteur des services commerciaux à la même Compagnie. — **Chemins de fer. Exploitation technique.** Grand in-8 de VII-408 p., avec 109 figures; 1901. (E. I.) 12 fr.

TOLDT (Friedrich), Ingénieur, Professeur à l'Académie impériale des Mines de Léoben. — **Traité des Fours à gaz à chaleur régénérée. Détermination de leurs dimensions.** Traduit de l'allemand sur la 2e édition revue et développée par l'Auteur; par F. Dommer, Ingénieur des Arts et Manufactures, Professeur à l'École de Physique et de Chimie industrielles de la Ville de Paris. Grand in-8, de 392 pages avec 68 figures; 1900. (E. I.) 11 fr.

VICAIRE (P.), Inspecteur général des Mines. — **Cours de Chemins de fer** (Cours de l'École nationale supérieure des Mines). *Matériel roulant. Traction. Voie. Exploitation.* Rédigé et terminé par F. Maison, Ingénieur au Corps des Mines. Grand in-8 de 581 pages, avec de nombreuses figures; 1903. (E. I.). 20 fr.

IX. — ENCYCLOPÉDIE SCIENTIFIQUE DES AIDE-MÉMOIRE.

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. LÉAUTÉ, Membre de l'Institut.

COLLECTION DE VOLUMES PETIT IN-8.

Chaque volume est vendu séparément :

Broché........ 2 fr. 50 c. | Cartonné, toile anglaise. 3 fr.

Le prospectus détaillé est envoyé franco sur demande.

Cette publication, qui se distingue par son caractère pratique, reste cependant une œuvre hautement scientifique. Elle embrasse le domaine entier des Sciences appliquées, depuis la Mécanique, l'Électricité, l'Art de l'Ingénieur, la Physique et la Chimie industrielles, etc., jusqu'à l'Agronomie, la Biologie, la Médecine, la Chirurgie et l'Hygiène.

Chaque volume, signé d'un nom autorisé, donne, *sous une forme condensée*, l'état précis de la Science sur la question traitée et toutes les indications pratiques qui s'y rapportent.

La publication est divisée en deux Sections : **Section de l'Ingénieur, Section du Biologiste**, qui paraissent simultanément depuis février 1892 et se continuent avec régularité de mois en mois.

Les Ouvrages qui constitueront ces deux Séries permettront à l'Ingénieur, au Constructeur, à l'Industriel, d'établir un projet sans reprendre la théorie; au Chimiste, au Médecin, à l'Hygiéniste, d'appliquer la technique d'une préparation, d'un mode d'examen ou d'un procédé sans avoir à lire tout ce qui a été écrit sur le sujet. Chaque volume se termine par une Bibliographie méthodique permettant au lecteur de pousser plus loin et d'aller aux sources.

DERNIERS VOLUMES PARUS.

SECTION DE L'INGÉNIEUR.

Périssé (R.), Ingénieur agronome. — *Le chauffage des habitations par les calorifères* (25 fig.).

Brunswick (E.-J.), Ingénieur électricien, et **Aliamet**, Ingénieur au chemin de fer du Nord. — *Construction des induits à courants continus. Manuel du bobinier* (53 fig.).

Truchot (P.), Ingénieur chimiste. — *Les petits métaux, Titane, Tungstène, Molybdène.*

Astruc (Henri), Ingénieur agricole, Préparateur à la station œnologique de l'Hérault. — *Le Vinaigre.* (16 fig.).

Grillet (Louis), Inspecteur du Travail dans l'Industrie. *Législation des accidents du travail.*

Dariès (G.), Ingénieur au service des Eaux de la Ville de Paris. — *Calcul des conduites d'eau*, 2e édition (44 fig.).

Fabry (Ch.), Professeur de Physique industrielle à la Faculté des Sciences de Marseille. — *Les piles électriques*, 2e édition (32 fig.).

Brunswick et Aliamet, Ingénieurs électriciens. — *Construction des induits à courant continu. Partie mécanique.* (35 fig.).

Grillet (Louis), Inspecteur du Travail dans l'Industrie. *La réglementation du travail dans l'industrie.*

Varenne (E.), Docteur de l'Université de Paris. — *L'alcool dénaturé.*

Fricker (M.), Ingénieur des Constructions navales. — *Rivetage* (40 fig.).

Grillet (Louis), Inspecteur du Travail dans l'industrie. — *Hygiène du travail dans les établissements industriels et commerciaux* (9 fig.).

Grillet (Louis), Inspecteur du Travail dans l'Industrie. — *La sécurité du travail dans l'Industrie* (26 fig.).

Rigaud (F.), ancien Ingénieur des Mines, Expert près la Cour d'Appel de Paris. — *Préparation mécanique des minerais. Résumé pratique* (2 fig.).

Petit (G.), Ingénieur civil. — *Céruse et blanc de zinc.*

SECTION DU BIOLOGISTE.

Charrin (A.), Médecin des hôpitaux de Paris. — *Les poisons de l'organisme. Poisons du tube digestif.* 2e édition.

Bérard (L.), Chirurgien des Hôpitaux, et **Potel (M.)**, Professeur agrégé à la Faculté de Médecine de Lyon. — *Les formes chirurgicales de la tuberculose intestinale.*

Berthault (F.), Professeur à l'École nationale d'Agriculture de Grignon. — *Les prairies. Prairies artificielles et prairies temporaires* (10 fig.).

Bergé (A.), Médecin des Hôpitaux. — *Guide de l'étudiant à l'hôpital. Règles et procédés de la clinique technique des autopsies.* 2e édition (1 figure).

Vires (Joseph), Professeur agrégé à la Faculté de Médecine de Montpellier. — *L'hérédité de la tuberculose.*

Bodin (E.), Professeur de Bactériologie à l'Université de Rennes. — *Les conditions de l'infection microbienne et l'immunité* (3 fig.).

Labit (H.) et **Polin (H.)**, Médecins principaux de l'armée. — *Le péril vénérien*, avec une préface de M. le professeur Fournier, Membre de l'Académie de Médecine.

Lafont (P.), Ingénieur agricole. — *L'Apiculture* (64 fig. et 1 carte).

Ménétrier (P.), Professeur agrégé, Médecin de l'Hôpital Tenon, et **Aubertin (Ch.)**, ancien Interne des hôpitaux de Paris. — *La Leucémie myéloïde.*

Jeanselme (Dr E.), Professeur agrégé de la Faculté de Médecine Médecin de l'Hôpital Tenon. — *Le béribéri* (3 fig.).

(Décembre 1906.)

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS (6e).

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat de poste ou valeur sur Paris.

CORRESPONDANCE D'HERMITE ET DE STIELTJES

PUBLIÉE PAR LES SOINS

DE

B. BAILLAUD,
Doyen honoraire de la Faculté des Sciences,
Directeur de l'Observatoire de Toulouse.

H. BOURGET,
Maître de Conférences à l'Université,
Astronome adjoint
à l'Observatoire de Toulouse.

Avec une Préface de Émile PICARD,
Membre de l'Institut.

DEUX VOLUMES GRAND IN-8 (25 × 16) SE VENDANT SÉPARÉMENT.

TOME I (8 novembre 1882 — 22 juillet 1889), Volume de xx-477 pages
avec deux portraits; 1905.................................. 16 fr.
TOME II (18 octobre 1889 — 15 décembre 1894), Volume de vi-457 pages
avec un portrait; 1905.................................. 16 fr.

Introduction.

On sait quelle place tint dans la vie scientifique d'Hermite sa corres-
pondance avec des savants français et étrangers. C'était pour lui un dé-
lassement que de se livrer en toute confiance à de longues causeries
épistolaires, heureux tout à la fois de faire profiter ses amis et ses élèves
des remarques suggestives auxquelles l'avaient conduit ses réflexions, et
de solliciter des éclaircissements en se faisant écolier. D'ailleurs, même
pour les Mémoires publiés dans les journaux scientifiques, la forme épis-
tolaire avait toujours eu sa prédilection. Ses travaux ont souvent paru
sous forme de lettres, rappelant le nom de ses nombreux correspondants;
il trouvait ainsi moyen d'associer la science et l'amitié.

Aucune correspondance d'Hermite ne fut plus suivie ni plus abondante
que celle qu'il avait commencée en 1882 avec un astronome adjoint de
l'Observatoire de Leyde, Thomas Stieltjes. Le souci des mêmes problèmes
et une même tournure d'esprit attirèrent Hermite vers Stieltjes, et une
vive sympathie s'établit vite entre le jeune débutant et le vétéran de la
Science. La mort de Stieltjes, arrivée prématurément en 1894, put seule
interrompre cette correspondance, unique peut-être dans l'histoire de la
Science. Relisant, après ce triste événement, la longue série de lettres du
géomètre éminent pour qui il avait une si affectueuse estime, Hermite
pensa qu'il importait à la mémoire de Stieltjes que ce témoignage de son
activité et de son génie mathématiques ne disparût point. Il était im-
possible de publier les lettres de Stieltjes sans publier celles d'Hermite,

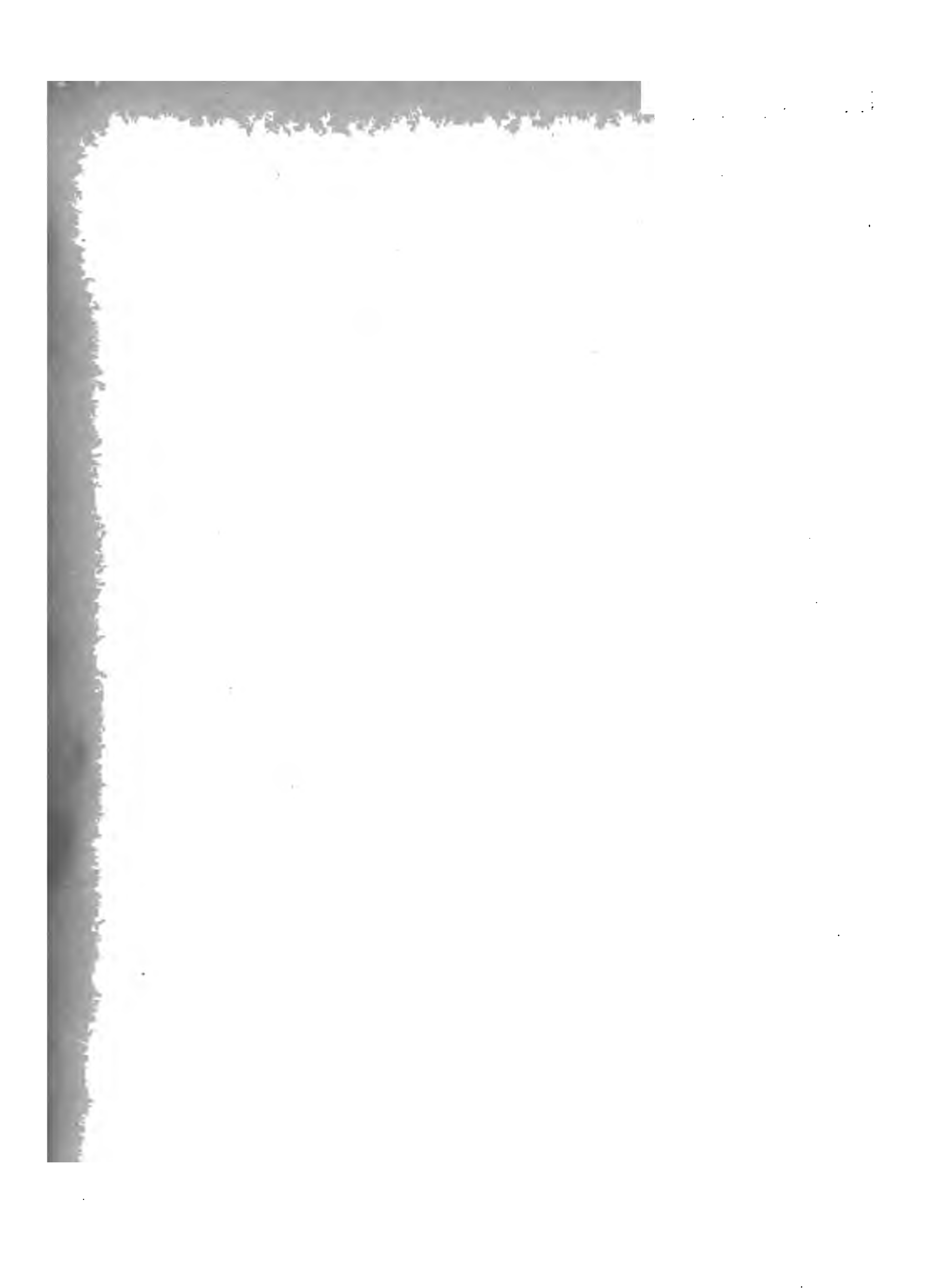
tant leur collaboration avait été intime; les amis de Stieltjes eurent ici à
vaincre quelque résistance d'Hermite, qui finit cependant par se décider
à laisser paraître l'ensemble de la Correspondance. M. Gauthier-Villars
voulut bien se charger de cette publication.

M. Baillaud et M. H. Bourget, qui avaient beaucoup connu et beaucoup
aimé leur collègue de la Faculté des Sciences de Toulouse, entreprirent
tout d'abord la collation des lettres et firent quelques coupures nécessaires.
Prenant à cœur la perfection de cette édition, ils reprirent ensuite les
calculs, là où il leur parut nécessaire, et ajoutèrent des Notes et des
éclaircissements. Le manuscrit était presque entièrement prêt à la mort
d'Hermite, qui avait suivi le travail de revision. Tous les amis et les admi-
rateurs d'Hermite et de Stieltjes remercieront MM. Baillaud et Bourget du
soin et du dévouement qu'ils ont apportés à cette œuvre.

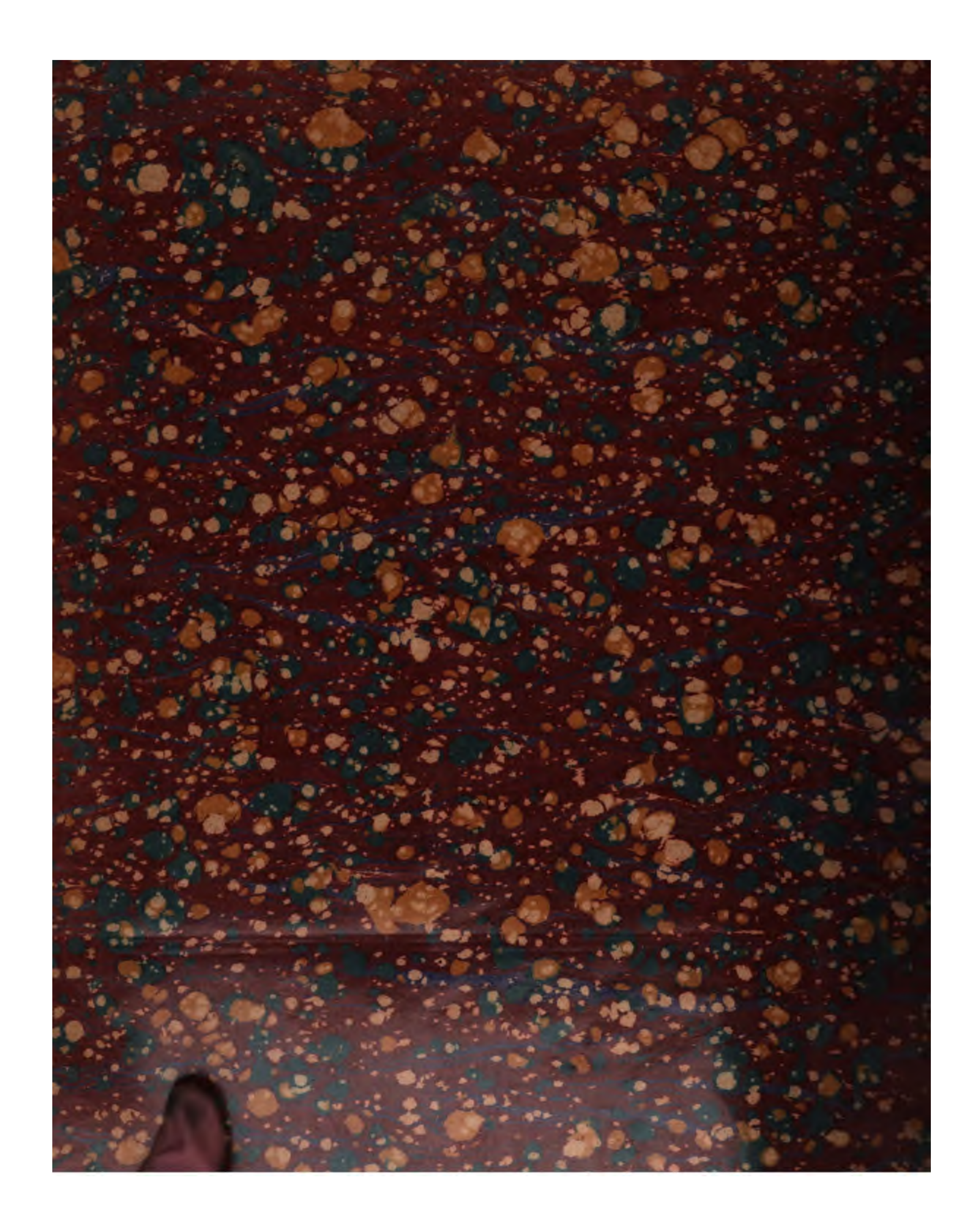
Il manque, hélas! une chose. Hermite avait promis d'écrire une
Introduction où il eût mis sans doute en pleine lumière l'origi-
nalité du talent de Stieltjes. Il n'appartient à personne de tenir
aujourd'hui la plume à sa place. L'affinité mathématique était complète
entre ces deux grands esprits. Une grande partie de la Correspondance a
un caractère arithmétique; c'est le *vir arithmeticus*, comme aurait dit
Jacobi, qu'Hermite affectionnait surtout en Stieltjes. Cet arithméticien ne
reste pas seulement sur les sommets à contempler les choses de loin et de
haut; il descend dans le fond des vallées et y recueille des applications
numériques d'où il sait ensuite tirer des remarques générales. Quelle joie
ce fut pour Hermite que de rencontrer un correspondant si perspicace
s'intéressant aux questions d'approximations, auxquelles il avait lui-même
consacré une grande partie de son labeur scientifique, en particulier aux
quadratures approchées et aux fractions continues algébriques. On re-
trouve chez Stieltjes, à l'apogée de son talent, le calculateur qu'il avait été
jadis à l'Observatoire de Leyde; c'est un des côtés de son originalité.

On est émerveillé aussi de la rapidité avec laquelle il répond aux
questions que lui pose Hermite et trouve des démonstrations ingénieuses
et profondes aux théorèmes qui lui sont énoncés. Nous voyons en même
temps le champ de ses études s'agrandir peu à peu; ses recherches sur
une transcendante envisagée par Riemann le font pénétrer profondément
dans la théorie des fonctions. Que de beaux travaux il eût faits encore en
portant dans cette voie ses préoccupations arithmétiques et algébriques
si sa carrière n'avait pas été si prématurément brisée! C'est ce dont
témoigne assez son dernier Mémoire, sur les fractions continues sur-
briques, qui est assurément un chef-d'œuvre.

La Correspondance d'Hermite et de Stieltjes n'intéressera pas seulement
les analystes. En même temps que deux géomètres de premier ordre, on
y voit deux beaux caractères. Quelle simplicité et quelle
le maître et le disciple, ou plutôt entre les deux amis
affectueuse chez l'un et chez l'autre! On est
ces pages, où ne se mêle aucune préoccupation
va jusqu'au bout de sa pensée. Il semble
pression laissée par ces lettres, que
langage abstrait de l'Analyse perde
matique y devienne plus humaine
l'amitié développée par cette correspondance
compter Thomas Stieltjes parmi les
seconde moitié du XIXe siècle.








STORAGE AR

